Отчет А.Ю. Савина о работе в 2008 году

Результаты 2008 года

1. Эллиптическая теория нелокальных операторов. В 2008 году была опубликована монография [1] (часть результатов была анонсирована в заметке [2]). Монография посвящена эллиптической теории для специального класса нелокальных операторов — дифференциальных операторов со сдвигами. Основной результат, это теорема об индексе. Дадим формулировку этой теоремы в случае скалярных операторов (результаты для операторов, действующих в сечениях расслоений, формулируются аналогично).

Рассматриваются операторы вида

$$D = \sum_{g \in \Gamma} T_g D_g : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \tag{1}$$

где Γ — некоторая группа изометрий гладкого замкнутого риманова многообразия M, которая является группой степенного роста (на Γ рассматривается дискретная топология); $\{D_g\}$ — дифференциальные операторы порядков $\mathrm{ord} D_g \leq m$, число m фиксировано. Предположим, для простоты, что только конечное число операторов D_g отлично от нуля. Для этого класса операторов вводится понятие символа

$$\sigma(D) \in C(S^*M) \rtimes \Gamma,$$

который естественно оказывается элементом C^*-алгебры $C(S^*M) \rtimes \Gamma$ — скрещенного произведения алгебры непрерывных функций на косферическом расслоении многообразия на группу Γ. Оператор D называется эллиптическим, если его символ обратим. Эллиптические операторы являются фредгольмовыми в подходящих пространствах Соболева.

Теорема 0.1. *Для индекса эллиптического оператора D вида* (1) *имеет место формула*

$$\mathrm{ind} D = \sum_{\langle g \rangle \subset \Gamma} \int_{S^*M_g} ch_g \sigma(D) \cdot Td_g(T^*M \otimes \mathbb{C})$$

- *сумма по классам сопряженности $\langle g \rangle$ группы Γ;*
- *$g \in \langle g \rangle$ — произвольный представитель класса сопряженности;*
- *$M_g \subset M$ — множество неподвижных точек диффеоморфизма g (оно является подмногообразием).*

Ряд сходится абсолютно.

Скажем несколько слов по поводу когомологических классов, участвующих в формуле индекса. Класс Тодда $Td_g(T^*M \otimes \mathbb{C}) \in H^{ev}(M_g) \otimes \mathbb{C}$ является классическим (он впервые возник у Атьи-Сигала-Зингера в работах по формулам Лефшеца).

Характер Черна эллиптического символа $ch_g\sigma(D) \in H^{odd}(S^*M_g) \otimes \mathbb{C}$, который участвует в формуле индекса, является новым (проблема явного построения характера Черна для скрещенных произведений была поставлена недавно П. Баумом; таким образом, построенный в цитированной монографии характер Черна даёт некоторое продвижение в решении проблемы Баума). Напомним, что в топологии характер Черна определяется на топологической K-группе и действует в группы когомологий. В нашей ситуации характер Черна

$$ch : K_*(C(S^*M) \rtimes \Gamma) \longrightarrow \bigoplus_{<g>\subset\Gamma} H^*(S^*M_g) \otimes \mathbb{C}$$

определён на K-группе C^*-алгебры — скрещенного произведения $C(S^*M) \rtimes \Gamma$ (символ эллиптического оператора является элементом K_1-группы этой алгебры), и действует в прямую сумму групп когомологий множеств неподвижных точек. Ценность такого характера Черна состоит в том, что он задаётся явной формулой и принимает значения в классических когомологиях де Рама.

Второй результат, который установлен в цитированной монографии, это обобщение теоремы периодичности Ботта. Этот результат формулируется так.

Пусть Γ — группа полиномиального роста, и $\Gamma \longrightarrow O(n)$ — точное представление группы Γ в ортогональной группе, которую будем рассматривать как подгруппу группы диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}$.

Теорема 0.2. *Имеет место изоморфизм K-групп*

$$K_0(C_0(T^*\mathbb{R}^n) \rtimes \Gamma) \simeq K_0(C^*\Gamma).$$

Здесь через $C^*\Gamma$ обозначена групповая C^*-алгебра группы Γ, $T^*\mathbb{R}^n$ — кокасательное расслоение (фазовое пространство) пространства $\mathbb{R}^n$, на котором группа Γ действует дифференциалами. Для изоморфизма, участвующего в этой теореме, можно дать явную формулу.

2. Эллиптическая теория для операторов на стратифицированных многообразиях. [3–6]. Главный символ псевдодифференциального оператора D на стратифицированном многообразии $\mathcal{M}$ представляет собой набор символов $\{\sigma_j(D)\}$ на стратах, где индекс j обозначает номер страта. Символ на страте полной размерности называется *внутренним символом.* Каждый символ $\sigma_j(D)$ является операторнозначной функцией на кокасательном расслоении соответствующего страта. При этом, внутренний символ принимает значения в операторах, действующих в конечномерных пространствах, а остальные символы принимают значения в операторах в бесконечномерных пространствах.

В [6] получена формула индекса, выражающая индекс в виде суммы гомотопических инвариантов эллиптических символов на стратах. Отметим, что для получения такого рода формул требуется, чтобы символ оператора был инвариантен относительно некоторого преобразования кокасательного расслоения многообразия (условие симметрии).

В работе [4] оператору с эллиптическим внутренним символом мы сопоставляем некоторый инвариант, принимающий значения в K-группе C^*-алгебры операторов с нулевым внутренним символом. Этот инвариант, называемый в работе *индексом*

Атьи–Ботта, полезен в эллиптической теории на стратифицированных многообразиях, так как: он является препятствием к тому, чтобы сделать оператор с обратимым внутренним символом обратимым путем прибавления к нему операторов с нулевым внутренним символом; в случае многообразий с краем индекс Атьи–Ботта совпадает с одноименным препятствием к существованию корректных (фредгольмовых) краевых условий для эллиптического оператора в ограниченной области.

Основной результат работы [4] — формула, выражающая индекс Атьи–Ботта в топологических терминах.

Теорема 0.3. *Пусть стратифицированное многообразие $\mathcal{M}$ не содержит замкнутых гладких компонент. Тогда справедлива коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} K^{*+1}(T^*\mathcal{M}) & \xrightarrow{\operatorname{ind}_{AB}} & K_{*+1}(J) \\ \simeq\Big\downarrow & & \Big\downarrow\simeq \\ K_{*+1}(\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_1) & \xrightarrow[\partial]{} & \widetilde{K}_*(\mathcal{M}_1) \end{array}$$

Здесь

- ind_{AB} — *индекс Атьи–Ботта, а* J — *алгебра псевдодифференциальных операторов с нулевым внутренним символом;*
- $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ — *множество особенностей в* $\mathcal{M}$*;*
- $\widetilde{K}_*(\mathcal{M}_1) \simeq \ker\{K_*(\mathcal{M}_1) \to K_*(pt)\}$ — *приведенная группа* K*-гомологий;*
- *через* ∂ *обозначено граничное отображение в* K*-гомологической точной последовательности пары* $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$*.*

Цель работы [5] состоит в том, чтобы построить изоморфизм Пуанкаре в случае многообразий с ребрами. Многообразия с ребрами представляют собой класс многообразий с неизолированными особенностями. В этой ситуации мы показываем, что изоморфизм Пуанкаре естественно строится в рамках некоммутативной геометрии. Более точно, многообразию с ребрами $\mathcal{M}$ мы сопоставляем некоторую некоммутативную алгебру $\mathcal{A}$ и устанавливаем изоморфизм

$$K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K^0(C(\mathcal{M})) \qquad (2)$$

K-группы алгебры $\mathcal{A}$ и группы аналитических K-гомологий алгебры $C(\mathcal{M})$ непрерывных функций на многообразии с ребрами, рассматриваемом как компактное топологическое пространство. В случае, когда $\mathcal{M}$ — гладкое многообразие, алгебра $\mathcal{A}$ совпадает с $C(\mathcal{M})$, а последний изоморфизм сводится к классическому изоморфизму Пуанкаре (после отождествления K-групп пространств с K-группами соответствующих алгебр функций).

Основной сложностью в построении изоморфизма (2) является то, что требуется реализовать оператор Дирака, заданный на гладкой части многообразия с ребрами, как эллиптический оператор над алгеброй $C(\mathcal{M})$ непрерывных функций на многообразии с ребрами $\mathcal{M}$. Оказывается, такого рода реализация не всегда возможна. Препятствием к этому, является отличие от нуля индекса Атьи–Ботта, который был описан выше. В ситуации, когда препятствие обращается в нуль, мы строим фредгольмову реализацию оператора Дирака.

Опубликованные и поданные в печать работы

[1–6]

Участие в конференциях

1. Международная конференция “Дифференциальные уравнения и топология”, посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина, Москва, июнь 2008 г. (30-минутный доклад).

2. Международная конференция “Noncommutative Geometry Conference”, Bonn, 28 July - 1 August 2008 (часовой доклад).

Педагогическая деятельность

Читаю лекции и веду семинарские занятия по математике на инженерном и медицинском факультетах Российского университета дружбы народов.

Список литературы

[1] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin. *Elliptic theory and noncommutative geometry*, volume 183 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[2] В. Е. Назайкинский, А.Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Об индексе нелокальных эллиптических операторов. *Доклады РАН*, **420**, No. 5, 2008.

[3] В. Е. Назайкинский, А.Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Некоммутативная геометрия и классификация эллиптических операторов. *Современная математика. Фундаментальные направления*, **29**, No. 1, 2008, 131–164.

[4] В. Е. Назайкинский, А.Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Индекс Атьи–Ботта на стратифицированных многообразиях. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2009. (принята к печати). Предварительная версия: arXiv:0711.4385.

[5] В. Е. Назайкинский, А.Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Двойственность Пуанкаре на многообразиях с рёбрами. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2009. (принята к печати). Предварительная версия: arXiv:0711.4379.

[6] A. Savin and B. Sternin. Index formulas on stratified manifolds. arXiv: 0812.2055, 2008.