Отчет А.Ю. Савина о работе в 2009 году

Результаты 2009 года

Результаты этого года были получены в рамках исследований по эллиптической теории нелокальных операторов. Во-первых, были продолжены исследования в ситуации, когда нелокальные операторы отвечают действию дискретной группы. Во-вторых, изучались нелокальные операторы, отвечающие действию группы Ли.

Опишем эти результаты более подробно.

1. Нелокальные эллиптические операторы для дискретной группы.

А. Операторы над C^*-алгебрами (см. [1]).

Пусть A— некоторая C^*-алгебра.

Рассматривалась алгебра операторов, порожденная псевдодифференциальными операторами над A и операторами сдвига, ассоциированными с дискретной группой изометрий многообразия. А именно, рассматриваются операторы вида

$$D = \sum_{g\in\Gamma} T_g D_g : C^\infty(M,A) \longrightarrow C^\infty(M,A), \tag{1}$$

где Γ — некоторая группа изометрий гладкого замкнутого риманова многообразия M, которая является группой степенного роста (на Γ рассматривается дискретная топология); $\{D_g\}$ — дифференциальные операторы, действующие в пространствах $C^\infty(M,A)$ гладких A-значных функций, рассматриваемых как правые A-модули, $T_g u(x) = u(g^{-1}x)$ — оператор сдвига.

Нелокальные операторы вида (1) не являются фредгольмовыми даже при выполнении условия эллиптичности. Однако, для них определен индекс (в смысле Мищенко–Фоменко)

$$\mathrm{ind}_A D \in K_0(A), \tag{2}$$

который является элементом группы $K_0(A)$ (в случае когда алгебра A есть $\mathbb{C}$, этот индекс совпадает с фредгольмовым индексом при отождествлении $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$).

Чтобы получить из индекса Мищенко–Фоменко (2) числовые инварианты, мы рассматриваем спаривание этого индекса с циклическими коциклами, определенными над плотными спектрально-инвариантными подалгебрами $B \subset A$. Основной результат работы [1] — формула, выражающая эти числовые инварианты в топологических терминах. Формула является достаточно громоздкой, поэтому мы не приводим её здесь.

Б. Операторы над алгеброй $\mathbb{C}$ (см. [2]).

Также рассматривались нелокальные операторы в скалярном случае, т.е. при $A = \mathbb{C}$. В цитированной работе были даны формулы индекса для геометрических операторов: оператора Эйлера, оператора сигнатуры, оператора Дирака. Выписаны явные выражения для вкладов в индекс символа на подмногообразиях неподвижных точек. С другой стороны, было установлено, что для групп без кручения вклады нетривиальных элементов группы в формулу индекса равны нулю и формула индекса для таких групп, которая была получена в 2008 году, сильно упрощается и содержит только интеграл по кокасательному расслоению T^*M.

2. Нелокальные эллиптические операторы для группы Ли.

Пусть G — компактная группа Ли, действующая на гладком замкнутом многообразии M. Рассматриваются операторы вида

$$D = 1 + \int\limits_G T_g D_g dg : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \tag{3}$$

где $\{D_g\}$ — гладкое семейство дифференциальных операторов на M порядка $\leq m$, $T_g u(x) = u(g^{-1}x)$ — оператор сдвига как и выше, dg — мера Хаара на группе. Этот класс операторов обобщает нелокальные операторы для дискретной группы и включает в себя ряд интегро-дифференциальных операторов.

Для операторов вида (3) в работе [3] вводится понятие символа

$$\sigma(D) \in 1 + C(S^*_G M) \rtimes G,$$

где 1) $S^*_G M$ — пространство ковекторов единичной длины ортогональных орбитам действия группы G; 2) $C(S^*_G M)$ — алгебра непрерывных функций на пространстве $S^*_G M$; 3) $C(S^*_G M) \rtimes G$ — скрещенное произведение алгебры на группу G.

Теорема 0.1 ([3]). *Если оператор D эллиптичен (т.е. его символ $\sigma(D)$ обратим), то D фредгольмов в пространствах Соболева при всех s:*

$$D : H^s(M) \longrightarrow H^{s-m}(M).$$

В [3] получена также формула индекса.

Опубликованные и поданные в печать работы

[1–7]

Участие в конференциях

1. Конференция победителей конкурса Пьера Делиня и конкурса фонда Дмитрия Зимина "Династия "Молодая математика России 12-13 января 2009 года, Москва.

2. Международная конференция "C*-algebras and elliptic theory. III Бедлево, Польша, 26 - 31 января 2009 г.

3. Всероссийская конференция "XLV Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики Москва, РУДН, 20-24 апреля 2009 г.

4. Международная конференция "K-theory, C*-algebras and topology of Manifolds г. Тянцзин, Китай, 1-5 июня 2009 г.

5. Международная конференция "Noncommutative Geometric Methods in Global Analysis Conference in Honor of Henri Moscovici Бонн, Германия, 29 июня - 4 июля 2009 г.

6. Российская школа-конференция "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании Москва, РУДН, 14-18 декабря 2009г.

Педагогическая деятельность

Читаю лекции и веду семинары по математике на инженерном факультете Российского университета дружбы народов.

Список литературы

[1] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Индекс нелокальных эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Доклады академии наук*, **426**, No. 3, 2009, 314–317.

[2] A. Savin and B. Sternin. Noncommutative elliptic theory. Examples. arXiv:0906.3700, (submitted), 2009.

[3] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Нелокальные эллиптические операторы для компактных групп Ли. *Доклады академии наук*, 2010. (принята к печати).

[4] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Хирургия и формулы индекса на стратифицированных многообразиях. *Доклады академии наук*, **427**, No. 3, 2009, 313–317.

[5] А. Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Формулы индекса на стратифицированных многообразиях. arXiv: 0812.2055, Дифференц. уравнения (принята к печати), 2009.

[6] В. Е. Назайкинский, А.Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Об изоморфизме Пуанкаре в K-теории на многообразиях с рёбрами. *Современная математика. Фундаментальные направления*, **34**, 2009, 109–120.

[7] В. Е. Назайкинский, А.Ю. Савин, Б. Ю. Стернин. Индекс Атьи–Ботта на стратифицированных многообразиях. *Современная математика. Фундаментальные направления*, **34**, 2009, 100–108.