

# ОТЧЁТ ПО ГРАНТУ «ДИНАСТИЯ» ЗА 2012 ГОД

А.А. ГАЙФУЛЛИН

## 1. Результаты, полученные в этом году.

1) Найдена связь явной комбинаторной конструкции реализации циклов с теорией групп Кокстера. Более точно: полученную автором в 2007-08 годах явную конструкцию реализации данного класса гомологий (с некоторой кратностью) образом фундаментального класса гладкого многообразия удалось изложить на языке групп Кокстера, что существенно её упростило.

2) Введено понятие URC-многообразия: ориентированное замкнутое многообразие  $M^n$  называется URC-многообразием, если любой класс гомологий любого топологического пространства может быть с некоторой кратностью реализован образом фундаментального класса конечнолистного накрытия над  $M^n$ . Из результата автора 2008 года следует, что в каждой размерности  $n$  имеется по крайней мере одно URC-многообразие — изоспектральное многообразие симметрических трёхдиагональных вещественных матриц размера  $(n + 1) \times (n + 1)$ . В текущем году автором был исследован класс URC-многообразий, в первую очередь с целью построения новых примеров. В результате было показано, что известная конструкция Дэвиса–Янушкевича, сопоставляющая каждому простому многограннику гладкое многообразие той же размерности, называемое *малым накрытием* над данным многогранником, при некоторых простых условиях на многогранник приводит к URC-многообразию. (Если в качестве исходного многогранника взять специальный многогранник, называемый *пермутэдром*, то получится в точности упоминавшееся выше изоспектральное многообразие.) Таким образом, построен большой набор примеров URC-многообразий. В частности, стартуя с прямоугольного правильного 4-мерного 120-гранника, получено гиперболическое (то есть допускающее метрику постоянной отрицательной кривизны) URC-многообразие, что доказывает гипотезу Котщика–Лёх.

3) Доказано, что в любой размерности  $n \geq 3$  имеется следующий аналог известной теоремы И.Х. Сабитова об объёмах. Объём любого многогранника в евклидовом пространстве размерности не менее 3 с треугольными двумерными гранями определяется комбинаторным типом многогранника и его длинами рёбер с точностью до конечного количества возможностей (отметим, что не требуется, чтобы многогранник был симплицильным, а требуется лишь, чтобы двумерные грани были треугольными). Более точно, объём

такого многогранника является корнем многочлена (зависящего от комбинаторного строения многогранника) с коэффициентами, являющимися многочленами от квадратов длин рёбер, и старшим коэффициентом 1. В качестве следствия получено, что объём любого такого многогранника не изменяется, если многогранник деформируется с сохранением комбинаторного типа и длин рёбер.

4) Доказано, что любое ориентированное замкнутое 4-мерное многообразие нулевой сигнатуры обладает кубильяжем, в котором каждая вершина имеет линк, изоморфный джойну границ  $k$ -угольника и  $l$ -угольника, где  $k, l \leq 5$ . В частности, в таком кубильяже каждая двумерная грань содержится не более, чем в пяти 4-мерных.

## 2. Опубликованные и поданные в печать работы.

1) А.А. Gaifullin, *Universal Realisators for Homology Classes*, arXiv:1201.4823, подана в журнал *Geometry and Topology*.

2) А.А. Gaifullin, *Combinatorial realisation of cycles and small covers*, arXiv:1204.0208, принята к публикации в *Proceedings of БЕСМ*.

3) А.А. Gaifullin, *Generalization of Sabitov's Theorem to Polyhedra of Arbitrary Dimensions*, arXiv:1210.5408.

## 3. Участие в конференциях и школах.

1) 6-ой Европейский математический конгресс, Краков, Польша, 2-7 июля 2012, 45-минутный приглашённый доклад "Combinatorial realisation of cycles and small covers".

2) "Первая конференция лаборатории им. Делоне", Ярославль, 14-16 марта 2012, доклад "Torus action in topology and combinatorics" (совместно с Т.Е. Пановым).

3) Воркшоп "Discrete Differential Geometry", Обервольфах, Германия, 8-14 июля 2012, без доклада.

4) Воркшоп "Rigidity Theory: Progress, Applications and Key Open Problems", Банфф, Канада, 15-20 июля 2012, доклад "Sabitov polynomials for volumes of four-dimensional polyhedra"

5) Ярославская международная конференция "Дискретная геометрия" посвящённая 100-летию А.Д.Александрова, Ярославль, 13-18 августа 2012, пленарный доклад "Sabitov polynomials for volumes of four-dimensional polyhedra".

6) "The Fourth Geometry Meeting dedicated to the centenary of A.D.Alexandrov", Санкт-Петербург, 20-24 августа 2012, пленарный доклад "Sabitov polynomials for volumes of four-dimensional polyhedra".

7) Международная конференция "Дни геометрии в Новосибирске, 2012", посвящённая 100-летию со дня рождения академика Александра Даниловича Александрова, Новосибирск, 30 августа – 1 сентября 2012, пленарный доклад "Combinatorial realisation of cycles and simplicial volume".

8) Вторая Интернет-видео конференция “День математика и механика”, посвященная 220-летию Н.И. Лобачевского, Екатеринбург–Москва–Санкт-Петербург–Новосибирск–Казань, 17 сентября 2012, доклад “Реализация 4-мерных классов гомологий многообразиями постоянной отрицательной кривизны”.

**4. Работа в научных центрах и международных группах.**  
Нет.

**5. Педагогическая деятельность.**

Весенний семестр 2012 года:

- 1) Чтение специального курса «Комбинаторные конструкции многообразий и их приложения» в НОЦ МИАН.
- 2) Научное руководство 1 студентом 4 курса Механико-математического факультета МГУ.

Осенний семестр 2012 года:

- 1) Ведение практических занятий по предметам «Дифференциальная геометрия и топология» (3 курс, 1 группа) и «Введение в топологию» (2 курс, 2 группы) на Механико-математическом факультете МГУ.
- 2) Чтение специального курса «Торическая геометрия и топология» на Механико-математическом факультете МГУ (совместно с В.М. Бухштабером и Т.Е. Пановым).
- 3) Научное руководство 1 студентом 5 курса и 4 студентами 3 курса.

**6. Итоги за 3 года.**

Так получилось, что итоги за 3 года по сути совпадают с отчётом за этот год. Дело в том, что практически во всех исследовавшихся задачах именно в этом году удалось добиться решающего результата: в задаче о кубильяжах 4-мерных многообразий — аккуратно завершить доказательство упомянутого выше результата о кубильяжах многообразий нулевой сигнатуры, в задаче об объёмах многогранников — доказать аналог теоремы Сабитова в произвольной размерности (в прошлом году она была доказана в размерности 4), в задаче о реализации циклов — доказать гипотезу Котшика–Лёх в размерности 4. Основной задачей, рассматривавшейся в заявке на конкурс, является задача о кубильяжах и триангуляциях 4-мерных многообразий с малым количеством типов линков вершин. Здесь полностью завершено аккуратное доказательство случая нулевой сигнатуры. К сожалению, в случае ненулевой сигнатуры ожидаемые результаты пока до конца не получены, хотя, по-видимому, имеются все основания ожидать их получения в ближайшем будущем. Это является основной причиной того, что и результаты для нулевой сигнатуры до сих пор не опубликованы (даже в виде препринта), так как хочется сразу написать результаты, работающие для всех 4-мерных многообразий.