проект **Решение проблемы эквивалентности для некоторых классов систем ОДУ второго порядка**

## Описание задачи

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) часто возникают в результате редукции уравнений в частных производных или, например, как условие отсутствия секулярностей при построении асимптотических разложений решений дифференциальных уравнений. Прежде чем интегрировать полученные таким образом ОДУ, имеет смысл проверить, не сводятся ли они некоторой заменой переменных к какому-либо уравнению, для которого уже найдено общее или семейство частных решений. В наиболее простом случае — не сводятся ли они к линейному уравнению.

В этом заключается одна из основных задач теории эквивалентности дифференциальных уравнений — установить, являются ли эквивалентными данные два уравнения, т.е. не описывают ли они один и тот же процесс, но в разных системах координат. Если они эквивалентны, то следующая задача — найти замену переменных, связывающую эти два уравнения. Эту замену следует искать среди преобразований, которые не выводят рассматриваемые ОДУ за пределы класса уравнений, которому они оба принадлежат (такие преобразования называют преобразованиями эквивалентности данного класса уравнений). Таким образом, еще одна задача — найти преобразование эквивалентности данного класса уравнений.

Задачи поиска эквивалентных уравнений, нахождения преобразований, связывающих эквивалентные уравнения, получения критериев эквивалентности могут быть решены с помощью инвариантов данного класса уравнений, поскольку если два уравнения эквивалентны, то все их инварианты равны.

Инвариантом класса уравнений называют функцию $I$, инвариантную относительно группы $E$ преобразований эквивалентности данного класса уравнений.

Преобразование эквивалентности, как правило, зависит от произвольных функций, т.е. группа $E$ преобразований эквивалентности бесконечна. При нахождении ее инвариантов используется метод построения дифференциальных инвариантов бесконечных групп Ли [1, §24]. Группа преобразований может иметь бесконечное число дифференциальных инвариантов, но базис инвариантов всегда конечен [2]. Произвольный инвариант группы может быть получен из базисных инвариантов с помощью алгебраических операций и применения операторов инвариантного дифференцирования.

## Проведенные исследования

В работе [3] решена проблема эквивалентности для класса уравнений

$$y'' = R(x,y)y'^2 + 2Q(x,y)y' + P(x,y), \tag{1}$$

замкнутого относительно точечной замены переменных

$$\bar{x} = \varphi(x), \quad \bar{y} = \psi(x,y), \tag{2}$$

т.е. построен базис дифференциальных инвариантов группы преобразований эквивалентности (2) и найдены операторы инвариантного дифференцирования.

В вырожденных случаях в формулах для инвариантов знаменатель принимает нулевое значение. Уравнения (1) вырождены, если $R_x - Q_y = 0$ или $R_{xy} - Q_{yy} + R(R_x - Q_y) = 0$. К ним относятся, например, все шесть уравнений Пенлеве, для которых $R_x - Q_y = 0$. Для исследования вырожденных случаев уравнения (1) в [3] предложено использовать подход, который состоит в переходе на инвариантное многообразие, задающее условие вырожденности. Этот подход позволяет систематически получать в вырожденных случаях *все* независимые базисные инварианты, без потери какой-либо их части.

Задача, подобная изложенной выше, была решена и для уравнений третьего порядка. В работе [4] для класса ОДУ третьего порядка

$$y''' = r(x, y, y')y''^2 + 2q(x, y, y')y'' + p(x, y, y'),$$

замкнутого относительно произвольной точечной замены переменных

$$\bar{x} = \phi(x, y), \qquad \bar{y} = \psi(x, y),$$

найдены инварианты и операторы инвариантного дифференцирования в основном (невырожденном) случае, когда $r_{xy'} + y'r_{yy'} + 2r_y - q_{y'y'} \neq 0$, и во всех вырожденных случаях.

Работа [5] посвящена исследованию уравнений третьего порядка вида

$$y''' = S(x, y, y')y''^3 + 3R(x, y, y')y''^2 + 3Q(x, y, y')y'' + P(x, y, y'). \tag{3}$$

Этот класс уравнений замкнут относительно произвольного контактного преобразования

$$\bar{x} = \Phi(x, y, y'), \quad \bar{y} = \Psi(x, y, y'), \quad \bar{y}' = \Omega(x, y, y').$$

Для уравнений (3) построен базис из девяти инвариантов третьего порядка и найдены операторы инвариантного дифференцирования, позволяющие получить произвольный инвариант класса уравнений (3) из базисных инвариантов.

## Проект будущих исследований

Рассматривается система двух ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned}
&x_1'' = b_{10} + 2b_{11}x_1' + 2b_{12}x_2' + b_{13}x_1'^2 + 2b_{14}x_1'x_2' + b_{15}x_2'^2 + x_1'(b_{30}x_1'^2 + 2b_{31}x_1'x_2' + b_{32}x_2'^2),\\
&x_2'' = b_{20} + 2b_{21}x_1' + 2b_{22}x_2' + b_{23}x_1'^2 + 2b_{24}x_1'x_2' + b_{25}x_2'^2 + x_2'(b_{30}x_1'^2 + 2b_{31}x_1'x_2' + b_{32}x_2'^2),\\
&b_{ij} = b_{ij}(t, x), \qquad x = (x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{4}$$

замкнутая относительно точечного преобразования

$$\bar{t} = \tau(t, x), \qquad \bar{x}_1 = \xi_1(t, x), \qquad \bar{x}_2 = \xi_2(t, x). \tag{5}$$

Выбор для исследования системы с кубической зависимостью от первых производных обусловлен тем, что такие системы ОДУ второго порядка часто возникают в задачах механики и в приложениях к задачам математической физики. Кроме того, класс уравнений (4) включает в себя линейные уравнения. Необходимым условием линеаризации системы двух ОДУ второго порядка локальной заменой переменных является форма (4) ее зависимости от первых производных.

**Задача 1.** Решить проблему эквивалентности для класса уравнений (4) относительно точечных преобразований вида (5). Т.е. в основном (невырожденном) случае и во всех случаях промежуточного вырождения построить базис инвариантов системы (4) и операторы инвариантного дифференцирования.

В работе [6] найдены 15 базовых величин, зависящих от производных первого порядка коэффициентов системы (4), но не сами инварианты. Инварианты являются функциями этих величин и их производных. Для основного (невырожденного) случая системы (4) они построены соискателем (в настоящее время этот результат еще не опубликован). Необходимо построить базис инвариантов системы (4) в случаях промежуточного вырождения, которых, судя по предварительному рассмотрению, будет порядка семи.

**Задача 2.** Решить проблему эквивалентности для класса уравнений

$$x_1'' = b_{10} + b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3' + b_{14}x_1'^2 + b_{15}x_2'^2 + b_{16}x_3'^2 + b_{17}x_1'x_2' + b_{18}x_1'x_3' + b_{19}x_2'x_3' + x_1'\Phi,$$
$$x_2'' = b_{20} + b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3' + b_{24}x_1'^2 + b_{25}x_2'^2 + b_{26}x_3'^2 + b_{27}x_1'x_2' + b_{28}x_1'x_3' + b_{29}x_2'x_3' + x_2'\Phi,$$
$$x_3'' = b_{30} + b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' + b_{34}x_1'^2 + b_{35}x_2'^2 + b_{36}x_3'^2 + b_{37}x_1'x_2' + b_{38}x_1'x_3' + b_{39}x_2'x_3' + x_3'\Phi,$$
$$\Phi = b_{40}x_1'^2 + 2b_{41}x_1'x_2' + b_{42}x_2'^2 + 2b_{43}x_2'x_3' + b_{44}x_3'^2 + 2b_{45}x_1'x_3', \tag{6}$$

относительно точечных преобразований вида

$$\bar{t} = \tau(t,x), \qquad \bar{x}_1 = \xi_1(t,x), \qquad \bar{x}_2 = \xi_2(t,x), \qquad \bar{x}_3 = \xi_3(t,x).$$

В качестве возможных приложений полученных результатов можно отметить уравнения главного резонанса, возникающие при осреднении системы слабо связанных нелинейных осцилляторов с вынуждающей силой по быстрым одночастотным колебаниям. Случай одного уравнения главного резонанса исследован в [7], где показано, что соответствующее ему ОДУ второго порядка может быть эквивалентно третьему или пятому урвнению Пенлеве. Поэтому и для системы уравнений главного резонанса можно ожидать существование подобной связи с какой-либо интегрируемой системой ОДУ второго порядка.

Также решение типа бегущей волны уравнений движения двухслойной жидкости со свободной поверхностью описывается системой ОДУ вида (4) (см. уравнения (13) в [8] или систему на стр. 68 в [9])

$$\begin{aligned} \beta_1 &= g(h_1+\lambda h_2) + \frac{\alpha_1^2}{h_1^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(2h_1h_1'' - h_1'^2)\right] + \lambda\frac{\alpha_2^2}{h_2^2}\left[h_2h_1'' - h_1'h_2' + \frac{1}{2}(h_2h_2'' - h_2'^2)\right], \\ \beta_2 &= g(h_1+h_2) + \frac{\alpha_2^2}{h_2^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(h_2h_1'' - h_1'^2) + \frac{1}{3}h_2h_2'' - \frac{1}{6}h_2'^2\right], \qquad \lambda, \alpha_i, \beta_i, g = \text{const}. \end{aligned} \tag{7}$$

Она имеет одну симметрию (следствие ее автономности) и, соответственно, один интеграл, найденный в [9], и в настоящее время исследована численно [8]. В то же время в однослойном случае ей соответствует известная модель Сью-Гарднера [10] (или Грина-Нагди [11]) второго приближения теории длинных волн. Ее частные решения выражаются через эллиптические функции [10], а также через решения уравнения, преобразованием Миуры связанного со вторым уравнением Пенлеве [12]. Поэтому можно ожидать, что с использованием инвариантов удастся показать, что система (7) некоторым преобразованием связана с какой-либо интегрируемой системой уравнений вида (4). То же справедливо и для уравнений движения трехслойной жидкости.

В качестве "канонических" (проинтегрированных) систем уравнений при поиске эквивалентных систем ОДУ вида (4) или (6) можно рассматривать интегрируемые замыкания и обрывы дискретно-непрерывных цепочек уравнений, разрешимые случаи задачи трех тел [13], интегрируемые случаи уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой (волчок Эйлера, Лагранжа, Ковалевской), движения твердого тела в идеальной жидкости (случаи Кирхгофа, Клебша, Стеклова). В [14] построено общее решение для гамильтоновой системы с гамильтонианом Эно-Эйлеса четвертой степени (4 интегрируемых случая) и третьей степени (в трех случаях, соответствующих стационарным решениям интегрируемых эволюционных уравнений пятого порядка — высшего КдФ, Савады-Котеры, Каупа-Купершмидта). Другие гамильтоновы системы с конечным числом степеней свободы, обладающие достаточно большим числом интегралов движения, рассмотрены в [15].

Как частный случай проблемы эквивалентности можно рассматривать вопрос о линеаризации системы ОДУ. Таким образом, имеем следующую задачу.

**Задача 3.** Для системы $n$ ОДУ второго порядка ($n = 2;\ 3$)

$$x_i'' = F_i(t, x, x'), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

получить критерий приводимости точечным преобразованием

$$\bar{t} = \varphi(t, x), \quad \bar{x}_i = \psi_i(t, x), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

к линейной системе

$$\bar{x}_i'' = p_i(\bar{t}) + q_i^j(\bar{t})\bar{x}_j + r_i^j(\bar{t})\bar{x}_j', \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

В [16] доказан критерий линеаризации для системы двух ОДУ второго порядка, допускающей четырехмерную алгебру симметрий определенного вида. Этот критерий основан на вычислении симметрий системы (8) и, значит, требует интегрирования дифференциальных уравнений. Необходимо получить критерий другого типа, который по правым частям уравнений (8) (и их производным по $t$, $x$) позволит определить, линеаризуема ли система (8). Критерием такого типа является хорошо известный критерий линеаризуемости системы (8) к простейшему виду (см. [6, 17, 18, 19])

$$\bar{x}_i'' = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Однако, в отличие от случая одного уравнения ($n = 1$), не все линейные системы (9) точечным преобразованием могут быть приведены к виду (10). Следовательно, не все линеаризуемые системы (8) сводятся к системе (10). Поэтому вопрос линеаризуемости системы ОДУ второго порядка к системе (9) общего вида в настоящее время остается открытым.

**Задача 4.** Еще одной задачей, примыкающей к задачам 1, 2, является получение необходимых и достаточных условий, при которых от системы (4) (или (6)) отделяется уравнение вида

$$z'' = S(t,z)z'^3 + 3R(t,z)z'^2 + 3Q(t,z)z' + P(t,z) \tag{11}$$

на функцию $z = \Phi(t, x_1, x_2)$ (или $z = \Phi(t, x_1, x_2, x_3)$). Эта задача актуальна, поскольку в случае систем ОДУ второго порядка имеется не так много "канонических" систем, т.е. систем с известным общим решением (по сравнению со случаем одного ОДУ второго порядка).

Более общей задачей является установление критерия отделимости уравнения на функцию $z = \Phi(t, x_1, x_2)$, но в предположении, что независимая переменная также преобразуется: $\bar{t} = \tau(t, x_1, x_2)$, т.е. функция $z(\bar{t})$ удовлетворяет ОДУ

$$z'' = S(\bar{t},z)z'^3 + 3R(\bar{t},z)z'^2 + 3Q(\bar{t},z)z' + P(\bar{t},z).$$

Эту задачу имеет смысл решать с помощью инвариантов систем (4), (6), поскольку, как и задача о линеаризации, она является частным случаем проблемы эквивалентности.

В связи с рассмотрением этой задачи также возникает необходимость построения полного базиса инвариантов класса уравнений (11), замкнутого относительно произвольного точечного преобразования

$$\bar{x} = \xi(x,y), \qquad \bar{y} = \eta(x,y).$$

(в [20] эта задача решена частично, т.к. там построены только четыре из шести базисных инвариантов).

Полученные в ходе выполнения проекта результаты будут опубликованы в виде статей в ведущих научных журналах.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Л.В. Овсянников, Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. A. Tresse, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Leipzig: Hirzel, 1896.
3. Ю.Ю. Багдерина, Эквивалентность обыкновенных дифференциальных уравнений $y'' = R(x,y)y'^2 + 2Q(x,y)y' + P(x,y)$. Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, №5. С. 581-589.
4. Yu.Yu. Bagderina, Equivalence of third-order ordinary differential equations to Chazy equations I-XIII. Stud. Appl. Math. 2008. V. 120, №3. P. 293-332.
5. Yu.Yu. Bagderina, Invariants of a family of third-order ordinary differential equations. J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42, №8. P. 085204. (21pp)
6. M.E. Fels, The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations. Proc. London Math. Soc. 1995. V. 71. P. 221-240.
7. Ю.Ю. Багдерина, Интегрируемые уравнения главного резонанса. Матем. заметки. 2006. Т. 80, вып. 3. С. 465-468.
8. R. Barros, S.L. Gavrilyuk, Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface Part II. Large amplitude solitary waves embedded into the continuous spectrum. Stud. Appl. Math. 2007. V. 119, №3. P. 213-251.
9. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л.В. Овсянников, Н.И. Макаренко, В.И. Налимов и др. Новосибирск: Наука, 1985.

10. C.H. Su, C.S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation. J. Math. Phys. 1969. V. 10, №3. P. 536-539.
11. A.E. Green, N. Laws, P.M. Naghdi, On the theory of water waves. Proc. Roy. Soc. London A. 1974. V. 338, №1612. P. 43-55.
12. Ю.Ю. Багдерина, А.П. Чупахин, Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений Грина-Нагди. ПМТФ. 2005. Т. 46, №6. С. 26-35.
13. Ф. Калоджеро, Разрешимая задача трех тел и гипотезы Пенлеве. ТМФ. 2002. Т. 133, №2. С. 149-159.
14. R. Conte, M. Musette, C. Verhoeven, Explicit integration of the Hénon-Heiles Hamiltonians. J. Nonlin. Math. Phys. Suppl. 1. 2005. V. 12. P. 212-227.
15. А.М. Переломов, Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
16. C. Wafo Soh, F.M. Mahomed, Linearization criteria for a system of second-order ordinary differential equations. Int. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36. P. 671-677.
17. А.В. Аминова, Н.А.-М. Аминов, Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка. Матем. сб. 2006. Т. 197, №7. С. 3-28.
18. S. Neut, Implantation et nouvelles applications de la méthode d'équivalence de Cartan. Thèse de doctorat, Univ. Lille I, 2003. P. 1-137.
19. S. Neut, M. Petitot, R. Dridi, Elie Cartan's geometrical vision or how to avoid expression swell. Electronic archive at LANL math.DG/0504203. 2005. P. 1-14.
20. R.A. Sharipov, Effective procedure of point-classification for the equations $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$. arXiv: math.DG/9802027.