Заявка на участие в конкурсе Пьера Делиня
и конкурсе фонда "Династия"для молодых математиков

План исследований

А.Д. Баранов

1. Введение. Проект направлен на исследование теоретико-функциональных и геометрических свойств модельных подпространств класса Харди и пространств целых функций де Бранжа.

Модельные подпространства впервые появились в работах А. Берлинга для пространств на окружности и П.Д. Лакса для случая прямой; в последнем случае они возникают при исследовании коинвариантных подпространств полугруппы сдвигов $\{S_t\}_{t\ge 0}$, где $(S_t f)(x) = f(x-t)$, в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Эквивалентная задача состоит в описании подпространств в классе Харди H^2, коинвариантных относительно полугруппы $(U_t)_{t\ge 0}$, где $(U_t f)(x) = e^{itx} f(x)$; всякое такое подпространство имеет вид

$$K^2_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2,$$

где Θ – внутренняя функция в верхней полуплоскости (т.е. ограниченная аналитическая функция, равная по модулю единице почти везде на $\mathbb{R}$). Пространства K^2_Θ, их L^p-аналоги K^p_Θ и многомерные обобщения играют исключительно важную роль как в теории операторов, так и в теории функций [CR00, N02]; в частности, при построении функциональной модели Надя–Фойаша для операторов сжатия в гильбертовом пространстве (отсюда термин *модельное (под)пространство*).

Упомянем два важные и естественные примера модельных подпространств. Если $\Theta(z) = \exp(iaz)$, $a > 0$, то $K^2_\Theta = PW_a \cap H^2$, где PW_a – пространство целых функций Пэли–Винера (пространство функций со спектром в $[-a, a]$). Если же Θ есть произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, то для $1 < p \le \infty$ модельное подпространство K^p_Θ совпадает с замыканием в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ правильных рациональных дробей с полюсами соответствующей кратности в множестве $\{\overline{z}_n\}$. Особый интерес представляют модельные подпространства, порожденные внутренними функциями Θ, мероморфными во всей комплексной плоскости. Такая функция Θ допускает представление $\Theta(z) = \overline{E(\overline{z})}/E(z)$, где E – целая функция со свойством $|E(z)| > |E(\overline{z})|$, $z \in \mathbb{C}^+$ (функция из класса Эрмита–Билера). Функция E порождает гильбертово пространство целых функций (пространство де Бранжа, [Br68]) $\mathcal{H}(E)$, причем отображение $F \mapsto F/E$ будет унитарным изоморфизмом пространства $\mathcal{H}(E)$ на K^2_Θ.

Теория пространств де Бранжа и модельных подпространств имеет важные приложения к исследованию спектральных задач для операторов Шредингера [HNP81, R02, MP05]. А именно, рассмотрим уравнение $-\ddot{u} + qu = \lambda u$ с локально интегрируемым потенциалом на интервале (a, b), регулярным в точке a. С каждым фиксированным самосопряженным граничным условием в точке b свяжем m-функцию Вейля $m(\lambda) = \dot{u}_\lambda(a)/u_\lambda(a)$, $\lambda \notin \mathbb{R}$, где u_λ – решение уравнения. Тогда $\Theta = \frac{m-i}{m+i}$ будет внутренней функцией (в случае компактной резольвенты Θ будет мероморфной во всей плоскости), и преобразование Вейля–Титчмарша отождествляет $L^2(a, b)$ с модельным пространством K^2_Θ. При этом собственным функциям u_λ отвечают *воспроизводящие ядра* модельного пространства. Таким образом, такие свойства собственных функций как полнота или базисность оказываются эквивалентными соответствующим свойствам для семейств воспроизводящих ядер в модельных пространствах (пространствах де Бранжа).

2. Проведенные исследования. Основные результаты относятся к следующим вопросам:

— Весовые неравенства Бернштейна для модельных подпространств и их приложения. Под неравенством типа Бернштейна мы понимаем оценку весовой нормы производной элемента модельного подпространства в терминах естественной L^p-нормы. Неравенствам типа Бернштейна в модельных подпространствах посвящен целый ряд работ. Напомним, что в пространствах Пэли–Винера имеет место классическое неравенство Бернштейна $\|f'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le a\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$. Обобщения этого неравенства для модельных подпространств были получены в [L75, D91, D02, BE96], отметим особенно неравенство Дьяконова [D91]: если $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$, то $\|f'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|\Theta'\|_\infty \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ для $f \in K^p_\Theta$. Локальное поведение производных элементов модельных подпространств на вещественной прямой, то есть в граничных точках, исследовалось в [AC70, C86a].

В статьях автора [B03, B05a] предложен новый подход к неравенствам Бернштейна, связанный с введением "исправляющего" веса, зависящего от свойств порождающей внутренней функции. Полученные результаты существенно обобщают неравенства Бернштейна, цитированные выше. В [B05a] показано, что оператор дифференцирования ограничен как оператор из модельного пространства K^p_Θ в некоторое пространство вида $L^p(wd\mu)$, где μ – произвольная мера Карлесона, а $w(z)$ – некоторый конкретный (и, в определенном смысле, оптимальный) вес, зависящий от плотности спектра внутренней функции Θ вблизи точки z (спектром внутренней функции называют наименьшее замкнутое множество, содержащее нули функции Θ и носитель сингулярной меры, порождающей сингулярный сомножитель). Приведем точные формулировки двух следствий этого результата:

1. *Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и пусть d_ε обозначает расстояние до множества уровня $\{|\Theta| < \varepsilon\}$. Тогда $\|f'd_\varepsilon\|_p \le C(p)\|f\|_p$ для $f \in K^p_\Theta$, $1 < p < \infty$.*

2. *Для приложений важен класс однокомпонентных функций Θ таких, что множество $\{|\Theta| < \varepsilon\}$ связно для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Если Θ – однокомпонентная функция с неограниченным спектром, то $\|f'/\Theta'\|_p \le C(\Theta,p)\|f\|_p$.*

Основным инструментом доказательства неравенств Бернштейна в модельных пространствах являются весовые оценки некоторых сингулярных интегральных операторов.

Как приложение весовых неравенств Бернштейна доказаны новые варианты теорем вложения карлесоновского типа, т.е. найдены условия на меру μ в замкнутой верхней полуплоскости, достаточные для вложения $K^p_\Theta \subset L^p(\mu)$, а также для компактности подобного вложения. Задача об описании таких вложений поставленная Коном в 1982, остается открытой [NV02, N02]. Полученное достаточное условие является наиболее общим из известных в настоящее время, и содержит целый ряд известных результатов, принадлежащих Кону [C86b], Вольбергу и Треилю [VT86], Симе и Мейтсону [CM03].

— Геометрические свойства систем воспроизводящих ядер (полнота, описание базисов Рисса и их устойчивость). Как было отмечено выше, геометрические свойства семейств воспроизводящих ядер в модельных пространствах и пространствах де Бранжа представляют значительный интерес. Воспроизводящее ядро пространства K^2_Θ имеет вид

$$k_\lambda(z) = \frac{1 - \overline{\Theta(\lambda)}\Theta(z)}{z - \overline{\lambda}}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{C}^+.$$

Следует упомянуть, что в случае $\Theta(z) = \exp(iaz)$ преобразование Фурье отображает пространство K^2_Θ на $L^2(0,a)$, причем системе воспроизводящих ядер $\{k_{\lambda_n}\}$ отвечает система экспонент $\{e^{i\lambda_n t}\}$. Такими образом, в этом случае вопросы полноты и базисности семейства воспроизводящих ядер оказываются классическими (и очень трудными) задачами о семействах экспонент. Первая из них решается знаменитой теоремой Берлинга–Мальявена о радиусе полноты [BM61, K92]. Новый подход к задаче о полноте экспонент и воспроизводящих ядер был предложен в недавней статье Макарова и Полторацкого [MP05]. Описание базисов из экспонент на отрезке было найдено Павловым, Никольским и Хрущевым [P79, HNP81]. В работе [HNP81] было также получено описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер в модельном подпространстве K^2_Θ при дополнительном условии $\sup_n |\Theta(\lambda_n)| < 1$.

В приложениях важную роль играет устойчивость полноты или базисности семейства воспроизводящих ядер. Пусть комплексные числа ("частоты") μ_n близки к λ_n в том или ином смысле. Возникает естественный вопрос, для каких малых возмущений свойства полноты/базисности системы сохраняются? Классические результаты об устойчивости для семейств экспонент принадлежат Пэли–Винеру, Редхефферу и Кадецу (теорема об 1/4).

В [B05b, B06a] получен ряд новых результатов об устойчивости полноты и базисности. В частности показано, что базисы Рисса устойчивы относительно возмущений, малых в псевдогиперболической метрике $\rho(\lambda,\mu) = \left|\frac{\mu-\lambda}{\mu-\bar\lambda}\right|$: *если $\{k_{\lambda_n}\}$ – базис Рисса, а $\rho(\lambda_n,\mu_n) < \varepsilon(1-|\Theta(\lambda_n)|)^\alpha$ для некоторого $\alpha > 1/3$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$, то $\{k_{\mu_n}\}$ также будет базисом Рисса.*

Другие результаты относится к возмущению важного класса базисов в модельных пространствах – ортогональных базисов де Бранжа–Кларка, отвечающих вещественным частотам. Эти результаты обобщают теоремы Кона [C86b] и Фрикена [F01] об устойчивости. В доказательстве результатов об устойчивости базисов Рисса применялись неравенства Бернштейна для модельных пространств.

Для исследования полноты семейств воспроизводящих ядер мы используем методы работ [BH06, MP05]. Например, в [B06a] получено следующее условие, достаточное для устойчивости: *Пусть семейство $\{k_{\lambda_n}\}$ полно в K^2_Θ, а функция $\mathcal{R}(t) = \sum_n \left|\frac{\lambda_n-\mu_n}{t-\lambda_n}\right|$ ограничена на $\mathbb{R}$. Тогда семейство $\{k_{\mu_n}\}$ также полно в K^2_Θ.* Для семейства $\{k_{s_n}\}$ с $s_n \in \mathbb{R}$ получены критерии полноты в терминах верхней и нижней плотности относительно носителя некоторого базиса де Бранжа–Кларка.

— Допустимые мажоранты для модельных подпространств, теоремы типа Берлинга–Мальявена. Неотрицательную на $\mathbb{R}$ функцию w называют *допустимой мажорантой* для пространства K_Θ, если найдется ненулевая функция $f \in K_\Theta$ такая, что $|f(x)| \le w(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$ (множество всех допустимых мажорант для K_Θ обозначим через $\mathrm{Adm}(\Theta)$). Естественное необходимое условие допустимости – сходимость логарифмического интеграла $\mathcal{L}(w) = \int_\mathbb{R} \log^+ w^{-1}\, d\Pi < \infty$, где $\log^+ t = \max(\log t, 0)$, а Π обозначает меру Пуассона на $\mathbb{R}$, $d\Pi(t) = \pi^{-1}(1+t^2)^{-1}dt$.

Описание допустимых мажорант для пространства Пэли–Винера является классической задачей. Широкий класс допустимых мажорант описывается знаменитой теоремой Берлинга–Мальявена о мультипликаторе: *если $\mathcal{L}(w) < \infty$ и $\Omega = -\log w$ – липшицева функция на $\mathbb{R}$, то w – допустимая мажоранта для всякого PW_a, $a > 0$.*

Допустимые мажоранты для модельных пространств общего вида были впервые рассмотрены в работах Хавина и Машреги [HM03a, HM03b]. Их подход основан на изучении преобразования Гильберта функции $\Omega = -\log w$. В частности, в статье [HM03a] дан следующий критерий допустимости (параметрическое описание класса $\mathrm{Adm}(\Theta)$ в терминах аргумента функции Θ): *неотрицательная функция w, удо-*

влетворяющая условию $\Omega \in L^1(\Pi)$, принадлежит классу $\mathrm{Adm}(\Theta)$ *тогда и только тогда, когда функция* $\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ *представима (по модулю 2π) как преобразование Гильберта логарифма некоторой ограниченной функции.*

Также в работе [HM03b] было найдено условие на функцию f, обеспечивающие такое представление и состоящее в том, что функция f в среднем ведет себя как достаточно регулярная монотонная функция. Улучшение этого достаточного условия получено в совместной работе автора и В.П. Хавина [BH06], где также доказано существование *минимальных* мажорант с определенными экстремальными свойствами. Особый интерес представляет вопрос о существовании положительных (т.е. отделенных от нуля на любом компакте) минимальных мажорант, исследованный в [HM03a, BH06, B06b].

В работах [HM03a, HM03b, BH06, B06b] достигнуто хорошее понимание класса допустимых мажорант в двух различных ситуациях: для произведений Бляшке с редкими нулями, близкими к мнимой оси (случай медленного роста аргумента) и для произведений с линейным (как для пространств Пэли–Винера) или более быстрым ростом аргумента. Между этими двумя ситуациями имеется определенный зазор. В статье [BBH07] получены результаты, проясняющие связь мажорант с распределением нулей для целого ряда типовых распределений нулей (нули в полосе или полуполосе, имеющие степенной рост, нули с быстрым касательным приближением к вещественной прямой).

В серии совместных работ с Х. Ворачеком [BW1, BW2, BW3] была исследована связь допустимых мажорант и структура подпространств в пространствах де Бранжа. Напоним, что одно из интереснейших свойств пространств де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ состоит в упорядоченности их подпространств, которые сами являются пространствами де Бранжа в метрике, унаследованной из $\mathcal{H}(E)$; класс таких подпространств мы обозначаем через $\mathrm{Sub}(E)$. Один из центральных результатов теории де Бранжа утверждает, что множество подпространств данного пространства, грубо говоря, с "одинаковыми" вещественными нулями, упорядочено по включению [Br68]. Теория де Бранжа гарантирует существование таких подпространств, однако трудность заключается в том, что для заданной (скажем, в виде бесконечного произведения) функции E не существует конструктивного способа определить все подпространства из $\mathrm{Sub}(E)$.

Пусть мажоранта $w(z)$, задана на подмножестве $D \subset \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ и локально отделена от нуля в $D \cap \mathbb{C}^+$. С каждой такой мажорантой свяжем класс функций $\mathcal{R}_w(E)$ – замыкание по норме пространства $\mathcal{H}(E)$ множества функций, допускающих мажорирование $\max(|F(z)|, F(\overline{z})|) \le Const\, w(z)$, $z \in D$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{R}_w(E)$ принадлежит $\mathrm{Sub}(E)$, то есть будет пространством де Бранжа. Более того, всякое подпространство из $\mathrm{Sub}(E)$ может быть получено таким образом. При этом, всякое подпространство без общих вещественных нулей может быть получено с помощью мажорирования вдоль мнимой оси с помощью некоторых канонических мажорант [BW2]. Подпространство порождено мажорантой, заданной на $\mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда средний тип функции E (т.е. $\limsup_{y\to\infty} \log\frac{|E(-iy)|}{|E(iy)|}$) равен нулю [BW1].

3. Проект будущих исследований. Планируется продолжить исследования модельных пространств и пространств де Бранжа в следующих направлениях.

— **Усеченные операторы Теплица.** Усеченным оператором Теплица (УОТ) называют сужение классического оператора Теплица на модельное подпространство с последующим проектированием. Пусть $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, тогда определим оператор A_φ на линейных комбинациях воспроизводящих ядер в K^2_Θ формулой $A_\varphi f = P_\Theta(\varphi f)$, где P_Θ – ортогональный проектор на модельное пространство K^2_Θ в единичном круге.

В отличие от классических операторв Теплица, действующих на всем пространстве Харди, усеченный оператор Теплица A_φ может быть в некоторых случаях продолжен до ограниченного оператора на K^2_Θ даже в случае неограниченного символа φ.

Систематическое изучение УОТ было недавно начато в работе Д. Сарасона [S07], однако многие естественые вопросы для них остаются открытыми. Так, до последнего времени был открыт поставленный в [S07] вопрос о существовании у ограниченного УОТ ограниченного символа (отметим, что символ неединственен). Автором построен первый контрпример, показывающий, что существуют ограниченные УОТ без ограниченного символа (и без символа из $L^p(\mathbb{T})$ при $p > 2$). Более того, используя идею Сарасона, мы показали, что такой оператор может быть оператором ранга один. Эти результаты опубликованы в совместной работе [BCFMT].

Предполагается продолжить исследование УОТ и их свойств в зависимости от геометрии соответствующих модельных пространств и, в частности, полностью решить вопрос о существовании у УОТ ограниченного символа. В [BCFMT] показано, что для пространств, порожденных одноточечной сингулярной функцией и для пространств Пэли–Винера в случае полуплоскости (при этом УОТ оказываются тесно связанными с операторами свертки типа Винера–Хопфа) ограниченный УОТ обязательно имеет ограниченный символ. На данный момент естественной кажется гипотеза о том, что это справедливо для всех однокомпонентных внутренних функций. Еще одна тема исследований – связь УОТ и мер Карлесона для K^2_Θ. Здесь тоже имеется ряд важных открытых вопросов, например, верно ли, что всякий положительный ограниченный УОТ порождается некоторой мерой Карлесона [S07].

— Гипотеза Фейхтингера для воспроизводящих ядер модельных пространств. В последнее время ведутся интенсивные исследования, связанные с гипотезой Фейхтингера (ГФ) о возможности разбиения фрейма в гильбертовом пространстве в конечное объединение базисов Рисса (см., например, [CCLV05, CT06]). Напомним, что последовательность $\{h_n\}$ в гильбертовом пространстве H называют фреймом, если сумма $\sum |(h, h_n)_H|^2$ допускает двустороннюю оценку через $\|h\|^2$. Эта задача оказывается равносильна целому ряду других известных проблем и, прежде всего, знаменитой гипотезе Кадисона–Зингера для C^*-алгебр.

Представляет интерес исследование ГФ для специальных семейств в функциональных пространствах, и в частности для семейств воспроизводящих ядер. Для многих классических пространств справедливость ГФ для ядер вытекает из известных результатов об интерполяции, однако для модельных пространств вопрос открыт и, в силу сложной и не полностью изученной геометрии этих пространств, вероятно является непростым. Существует мнение (Н.К. Никольский), что именно среди семейств ядер в модельных подпространствах следует искать контрпример к ГФ. Заметим, что свойство фрейма для семейства нормированных ядер точках λ_n означает, что для некоторой дискретной меры с нагрузками в λ_n имеет место вложение данного модельного пространства в $L^2(\mu)$ с эквивалентностью норм.

В совместной работе с К.М. Дьяконовым было показано, что гипотеза Фейхтингера справедлива в K^2_Θ для семейств $\{k_{\lambda_n}\}$ со свойством $\sup_n |\Theta(\lambda_n)| < 1$ и для случая, когда Θ – однокомпонентная внутренняя функция (при этом использовались результаты из [B05b] об устойчивости базисов Кларка. Мы планируем продолжить исследование геометрические свойства семейств воспроизводящих ядер в модельных пространствах, связанных с гипотезой Фейхтингера, выделить новые классы модельных пространств, для которых гипотеза справедлива, и попытаемся построить контрпример в общем случае.

Список литературы

[AC70] P.R. Ahern, D.N. Clark, Radial limits and invariant subspaces, *Amer. J. Math.* **92** (1970), 2, 332-342.

[B03] А.Д. Баранов, Весовые неравенства Бернштейна и теоремы вложения для модельных подпространств, *Алгебра и Анализ*, **15** (2003), 5, 138–168.

[B05a] A.D. Baranov, Bernstein-type inequalities for shift-coinvariant subspaces and their applications to Carleson embeddings, *J. Funct. Anal.* **223** (2005), 1, 116–146.

[B05b] A.D. Baranov, Stability of bases and frames of reproducing kernels in model subspaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), 2399–2422.

[B06a] A.D. Baranov, Completeness and Riesz bases of reproducing kernels in model subspaces, *Intern. Math. Res. Notices.* vol. **2006**, Article ID 81530, 34 pages, 2006.

[BH06] А.Д. Баранов, В.П. Хавин, Допустимые мажоранты для модельных подпространств и аргументы внутренних функций, *Функц. анал. прил.* **40** (2006), 4, 2–21.

[B06b] A.D. Baranov, Polynomials in the de Branges spaces of entire functions, *Ark. Mat.* **44** (2006), 1, 16–38.

[BBH07] A.D. Baranov, A.A. Borichev, V.P. Havin, Admissible majorants for meromorphic functions with fixed poles, *Indiana Univ. Math. J.* **56** (2007), 4, 1595–1628.

[BCFMT] A. Baranov, I. Chalendar, E. Fricain, J. Mashreghi, D. Timotin, Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators, arXiv:0909.0131v1 [math.FA].

[BD] A.D. Baranov, K.M. Dyakonov, The Feichtinger conjecture for reproducing kernels in model subspaces, arXiv:0906.2158v1 [math.CV].

[BE96] P. Borwein, T. Erdelyi, Sharp extensions of Bernstein's inequality to rational spaces, *Mathematika*, **43** (1996), 2, 413–423.

[BM61] A. Beurling, P. Malliavin, On Fourier transforms of measures with compact support, *Acta Math.* **107** (1962), 291-309.

[BM67] A. Beurling, P. Malliavin, On the closure of characters and the zeros of entire functions, *Acta Math.* **118** (1967), 79–93.

[BW1] A. Baranov, H. Woracek, Subspaces of de Branges spaces generated by majorants *Canadian Journal of Mathematics*, **61** (2009), 3, 503–517.

[BW2] A. Baranov, H. Woracek, Majorization in de Branges spaces I. Representability of subspaces, arXiv:0906.2939v1 [math.CV].

[BW3] A. Baranov, H. Woracek, Majorization in de Branges spaces II. Banach spaces generated by majorants, arXiv:0906.2943v1 [math.CV].

[Br68] L. de Branges, Hilbert spaces of entire functions. Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1968.

[CCLV05] P.G. Casazza, O. Christensen, A. Lindner, R. Vershynin, Frames and the Feichtinger Conjecture, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 4, 1025–1033.

[CT06] P.G. Casazza, J.C. Tremain, The Kadison-Singer problem in Mathematics and Engineering, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **103** (2006), 7, 2032–2039.

[CM03] J.A. Cima, A.L. Matheson, On Carleson embeddings of star-invariant subspaces, *Quaest. Math.* **26** (2003), 3, 279–288.

[CR00] J. A. Cima, W. T. Ross, *The backward shift on the Hardy space,* Mathematical Surveys and Monographs, 79, AMS, Providence, RI, 2000.

[C86a] W. S. Cohn, Radial limits and star invariant subspaces of bounded mean oscillation, Amer. J. Math., **108** (1986), 3, 719-749.

[C86b] W.S. Cohn, Carleson measures and operators on star-invariant subspaces, *J. Oper. Theory*, **15** (1986), 1, 181–202.

[D91] К.М. Дьяконов, Целые функции экспоненциального типа и модельные подпространства в H^p, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **190** (1991), 81–100.

[D02] K.M. Dyakonov, Differentiation in star-invariant subspaces I: Boundedness and compactness, *J. Funct. Anal.*, **192**, 2 (2002), 364–386.

[F01] E. Fricain, Bases of reproducing kernels in model spaces, *J. Oper. Theory*, **46** (2001), 3 (suppl.), 517–543.

[HM03a] V.P. Havin, J. Mashreghi, Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part I: slow winding of the generating inner function, *Can. J. Math.* **55** (2003), 6, 1231–1263.

[HM03b] V.P. Havin, J. Mashreghi, Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part II: fast winding of the generating inner function, *Can. J. Math.* **55**, (2003), 6, 1264–1301.

[HNP81] S.V. Hruscev, N.K. Nikolskii, B.S. Pavlov, Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels, Lecture Notes in Math., **864** (1981), 214–335.

[K92] P. Koosis, *The Logarithmic Integral II*, Cambridge Stud. Adv. Math. **21**, 1992.

[L75] М.Б. Левин, Оценка производной от мероморфной функции на границе области, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, вып. 24, Харьков, 1975, 68–85.

[MP05] N. Makarov, A. Poltoratski, Meromorphic inner functions, Toeplitz kernels and the uncertainty principle, Perspectives in analysis, Math. Phys. Stud. **27**, Springer, Berlin, 2005, 185–252.

[N02] N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading. Vol. 1-2*, Math. Surveys Monogr., Vol. 92–93, AMS, Providence, RI, 2002.

[NV02] F. Nazarov, A. Volberg, The Bellman function, the two-weight Hilbert transform, and embeddings of the model spaces K_Θ, *J. Anal. Math.* **87** (2002), 385–414.

[P79] Б.С. Павлов, *Базисы из экспонент и условие Маккенхаупта*, ДАН СССР **247** (1979), no. 1, 37–40.

[R02] C. Remling, Schrödinger operators and de Branges spaces, *J. Funct. Anal.* **196** (2002), 323–394.

[S07] D. Sarason, Algebraic properties of truncated Toeplitz operators, *Oper. Matrices* **1** (2007), 4, 491–526.

[VT86] А.Л. Вольберг, С.Р. Треиль, Теоремы вложения для инвариантных подпространств оператора обратного сдвига, *Зап. научн. семин. ЛОМИ,* **149** (1986), 38–51.