Теорема о локальной структуре и геометрия кокасательного расслоения.

Жгун В.С.

Основным объектом исследования данного проекта являются действия редуктивных групп на алгебраических многообразиях над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Алгебраическое многообразие обозначим через X, а действующую на нем редуктивную группу через G. Мы сфокусируем свое внимание на вопросах связанных с таким инвариантом этих действий как малая группа Вейля W_X. В случае, когда рассматриваемое многообразие является редуктивной группой, действующей на себе сопряжениями, малая группа Вейля совпадает с обычной группой Вейля рассматриваемой группы. Также подобный объект изучался в случае симметрических однородных пространств. Немного позднее М.Брион определил эту группу в случае сферических многообразий (последние определяются как многообразия имеющие плотную орбиту борелевской подгруппы). В наиболее общей ситуации для нормальных G-многообразий группа Вейля была введена Ф.Кнопом. Как оказалось эта группа может быть определена с помощью отображения моментов $T^*X \to \mathfrak{g}^*$. Поэтому основным объектом исследования у нас будет кокасательное расслоение T^*X для G-многообразия X и образ отображения моментов.

В работе [4] Ф.Кнопу для определения группы Вейля было необходимо вычислить образ отображения моментов, что было сделано с помощью дифференциальных операторов и техники деформации к орисферическому многообразию (определение и доказательство существования этой деформации содержится в ставшей классической работе [7]). Видимо это доказательство не устраивало самого автора всилу своей неконструктивности, поскольку в работе [5] он вычислил образ отбражения моментов совершенно другим способом и определил малую группу Вейля для класса многообразий содержащего квазиаффинные многообразия. К сожалению, последний класс многообразий не содержит такие важные многообразия как грассманианы или многообразия полных флагов.

С другой стороны Э.Б.Винбергом [9] был получен замечательный результат о реализации малой группы Вейля в качестве группы Галуа некоторого рационального накрытия кокасательного расслоения. Множество общих орбит всех максимальных унипотентных подгрупп может быть снабжено структурой многообразия, которое называется многообразием орисфер. Как показал Э.Б.Винберг в случае квазиаффинного многообразия кокасательное расслоение к этому многообразию рационально накрывает T^*X с группой Галуа равной малой группе Вейля. К сожалению, последняя конструкция не проходит в случае многообразий флагов.

Итак цель наших исследований дать чисто геометрическое вычисления образа отображения моментов, обобщая тем самым результаты Ф.Кнопа [5], а также получить аналог результатов Э.Б.Винберга для нормальных алгебраических многообразий.

Проведенные исследования.

Для действий редуктивных групп на алгебраических многообразиях представляет интерес изучение их ограничений до действий параболических подгрупп. Теоремы, описывающие ограничение такого действия до действия параболической подгруппы на открытом подмножестве в X, называются теоремами о локальной структуре и были получены Гроссхансом, Брионом, Луной, Вюстом, а также Кнопом [3],[2],[5]. Эти теоремы являются важным инструментом для изучения G-многообразий и могут быть применены для описания кокасательного расслоения к пространствам общих орисфер в случае, когда группа действует на квазиаффинном многообразии. Отправной точкой для проведенных исследований была замечательная работа Д.А.Тимашева [8]. В ней было показано, что если многообразие не является квазиаффинным, при некоторых дополнительных условиях теорема о локальной структуре может быть существенно усилена. В классической формулировке в качестве искомой параболической подгруппы P берется нормализатор общей орбиты в X борелевской подгруппы B группы G. Усиленная теорема о локальной структуре описывает действие некоторой большей параболической подгруппы Q (содержащей группу P) на вообще говоря большем множестве. При этом оказывается, что в формуле, описывающей структуру действия Q на открытом подмножестве в X, выделяется множитель изоморфный многообразию флагов Q/P.

Нами получено обобщение подобной теоремы о локальной структуре [11]. К сожалению, в этом проекте сложно привести точные формулировки результатов в направлении теорем о локальной структуре всилу необходимости введения большого числа обозначений. Мы приведем несколько ослабленные утверждения, читатель, желающий узнать точные формулировки, может обратиться к приложенному тексту [11].

Основным результатом в направлении усиления теоремы локальной структуры является существование отображения описанного в следующей теореме. Отметим, что здесь не требуется никаких дополнительных условий на многообразие X.

Теорема 0.1. *[11, Thm.1.10] Пусть X — нормальное алгебраическое многообразие с действием редуктивной группы G, B — борелевская подгруппа, а P — параболическая подгруппа являющаяся нормализатором общей орбиты борелевской подгруппы B в X. Пусть Q — параболическая подгруппа стабилизирующая дивизоры рациональных функций, полуинвариантных отностительно фиксированной борелевской подгруппы B. Тогда существует некоторая Q-инвариантная неполная линейная подсистема осуществляющая Q-эквивариантное отображение открытого подмножества в X на многообразие флагов Q/P.*

Саму теорему о локальной структуре можно сформулировать в следующем ослабленном виде. Здесь нам понадобится некоторый тор A. Пусть L — подгруппа Леви в P. Рассмотрим $L_0 \subset L$ — максимальную подгруппу содержащую коммутант $[L, L]$ и действующую тривиально на B-полуинвариантных рациональных функциях. Обозначим фактор $A := L/L_0$, также через P^- обозначим подгруппу противоположная к P, а через M — подгруппу Леви в Q.

Теорема 0.2. *([11, Thm.3.1] ср.[8, Thm.3]) Существует открытое Q-инвариантное подмножество X_0' в X и многообразие C, такие что имеет место Q-эквивариантный изоморфизм*

$$Q *_M (M/M \cap P^- \times A \times C) \xrightarrow{\sim} X_0',$$

где M действует на $M/M \cap P^-$ справа, а на торе посредством фактора $M/L_0[M, M] \cong A$ [1].

Эта часть работы не является опубликованной. Она была доложена на некоторых конференциях и обсуждена с Д.А.Тимашевым, М.Брионом и Ф.Кнопом, за что автор хочет выразить им глубокую благодарность.

[1] Для алгебраических групп $G \supset H$ и квазипроективного H-многообразия Z мы можем построить G-многообразие $G *_H Z$, рассматривая фактор $G \times Z$ по действию H: $(g, z) \to (gh^{-1}, hz)$, который существует и является квазироективным многообразием

Планируемые результаты.

В этой части я приведу ожидаемые результаты. Некоторая их часть содержится в препринте [11].

Итак нас интересует следующие вопросы. Во-первых, вычислить образ отображения моментов без участия теорем о дифференциальных операторов в случае нормального квазипроективного многообразия. Во-вторых, мы хотим обобщить результат Э.Б.Винберга на все многообразия.

В теореме Э.Б.Винберга главную роль играло семейство общих орбит максимальной унипотентной подгруппы, а также конормальное расслоение $\mathcal{N} \subset T^*X$ к слоению, определяемому этим семейством. Основным этапом было утверждение о том, что $G\mathcal{N}$ плотно в T^*X. Оказывается, в случае многообразий флагов, это свойство не выполнено. Нашей целью является построение семейства необщих орбит максимальной унипотентной группы, такое что конормальное расслоение к слоению, определяемому этим семейством, после разнесения группой G будет плотно в T^*X.

Теорема 0.3. *[11, Thm.4.5] Пусть X — алгебраическое G-многообразие, а U — унипотентный радикал B. Рассмотрим открытое подмножество $X_0 \cong P*_L Z$, полученное применением теоремы о локальной структуре к параболической подгруппе $P = P(X)$. Тогда существует максимальная унипотентная подгруппа $\overline{U}$, удовлетворяющая следующим свойствам*

(i) Для любого $z \in Z$ имеем $\overline{U}z = (\overline{U} \cap U)z$.

(ii) Пусть $\mathcal{N}$ — конормальное расслоение к слоению определяемому семейством орбит $\overline{U}z$ для $z \in Z$. Тогда выполнено равенство $\overline{G\mathcal{N}} = T^*X$.

Для доказательства этой теоремы используется разложение Бялиницкого-Бируля для специально выбранной однопараметрической подгруппы. Из предыдущей теоремы можно непосредственно получить следующий результат.

Теорема 0.4. *[11, Thm.4.19] Пусть S — нормализатор орбиты $\overline{U}z$ для $z \in Z$ (где Z определено в предыдущей теореме), а $\widetilde{P}$ — подгруппа порожденная S и L. Тогда отображение $G *_{\widetilde{P}} \mathcal{N} \to T^*X$ конечно в общей точке.*

Определим многообразие вырожденных орисфер $\mathcal{H}or$, рассмотрев разнесение с помощью G семейства $\overline{U}$-орбит, рассмотренного в теореме 3. Обозначим через $T^*\mathcal{H}or$ кокасательное пространство к многообразию орисфер. Имеет место следующая теорема, обобщающая результаты Э.Б.Винберга и Д.А.Тимашева [9],[8].

Теорема 0.5. *Существует рациональное накрытие Галуа $T^*\mathcal{H}or \longrightarrow T^*X$, группой Галуа которого является малая группа Вейля W_X, определенная Кнопом.*

Нужно отметить области исследования, в которых я еще не готов дать точные формулировки теорем. Во-первых, хотелось бы увеличить область определения отображения из предыдущей теоремы. Однако, как видно из примеров, для всех многообразий это сделать нельзя. Предполагается, что для чудесных вложений однородных сферических пространств рассматриваемое отображение можно продолжить таким образом, чтобы оно было не определено на множестве коразмерности не менее двух.

В своей работе [6] Ф.Кноп посредством отображения универсальной обертывающей алгебры в алгебру дифференциальных операторов на X показал, что малая группа Вейля W_X может быть вложена в качестве подгруппы в группу Вейля для G. Хотелось бы получить геометрическое объяснение этого факта, не использующее дифференциальные операторы. Это могло бы привести к лучшему пониманию малой группы Вейля и геометрических аспектов с ней связанных.

Список литературы

[1] M.Brion, The cone of effective one-cycles of certain G-varieties dans : A Tribute to C. S. Seshadri, 180–198, Hindustan Book Agency, 2003.

[2] M.Brion, D.Luna, Th.Vust, Espaces homogènes sphériques. Invent. Math. **84**, (1986), 617–632.

[3] F.D.Grosshans, Constructing invariant polynomials via Tchirnhaus transformations. Invariant theory, Lecture notes in Math., vol **1278**, Springer, Berlin, (1987), 95–102.

[4] F.Knop, Weylgruppe und Momentabbildung, Invent. Math. **99** (1990), 1–23.

[5] F.Knop, The asymptotic behavior of invariant collective motion. Invent. math. **116** (1994), 309–328.

[6] F.Knop, A Harish-Chandra Homomorphism for Reductive Group Actions. Annals of Mathematics, Series II 140 (1994) 253-288.

[7] V.L.Popov, Contractions of the actions of reductive algebraic groups Mat.Sb.(N.S.), 1986, 130(172):3(7), 310-–334.

[8] D.A.Timashev, Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles II, Moscow Math. J., Vol. 6, (2) (2006), 389-404.

[9] E.B.Vinberg, Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles, Moscow Math. J., Vol. 1, (2) (2001), 287–299.

[10] E.B. Vinberg, V.L. Popov, Invariant theory, in Algebraic geometry. IV. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 55 (translated from 1989 Russian edition) Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[11] V.S. Zhgoon, On the Local structure theorem and equivariant geometry of cotangent vector bundle. attached preprint.