ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, ВЫЧЕТЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

План исследования

А.А. Кытманов

Метод интегральных представлений для голоморфных функций играет важную роль как в самом комплексном анализе (см. [1, 4, 5, 6]), так и в ряде других областей, например, в алгебраической геометрии [2, 7], и математической физике [5, 8]. Если речь вести об интегральных формулах вида

$$f(z) = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\omega(\zeta, z), \tag{1}$$

в которых ядра $\omega(\zeta, z)$ являются замкнутыми дифференциальными формами, а множествами интегрирования Γ служат циклы, то можно заметить тесную связь концепции интегральных представлений с теорией вычетов [1, 7]. Здесь дело в том, что формула (1) эквивалентна тому, что вычет относительно цикла Γ для ядра $\omega = \omega(\zeta, 0)$ (т.е. интеграл ω по Γ) равен единице.

Исторически первыми интегральными представлениями были:

- формула Коши для полицилиндра, доказанная А.Пуанкаре [19] в 1887г.

- формула Бохнера-Мартинелли для шара [17] (1938), [9] (1943).

Соответствующие ядра указанных формул в n-мерном пространстве следующие:

$$\omega_K = \frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n},$$

$$\omega_{BM} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta}{|\zeta|^{2n}}.$$

В каком-то смысле эти две формулы явились эталонными, из которых впоследствии на основе гомологических и когомологических процедур был построен ряд других интегральных представлений (формулы Вейля, Коши-Фантапье и т.д.).

В 1999г. А.К.Цих [20] заметил, что эталонные ядра $\omega = \omega_K$ и $\omega = \omega_{BM}$ обладают свойством:

ω регулярна в области, наивысшая нетривиальная группа когомологий которой имеет одну образующую, представленную формой ω.

Так, ядро Коши ω_K регулярно в комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, который гомотопически эквивалентен вещественному тору $\mathbb{T}^n$, и ядро Бохнера-Мартинелли регулярно в проколотом пространстве $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, гомотопически эквивалентном сфере S^{2n-1}. Таким образом, гомотопические типы областей регулярности указанных форм представляются связными ориентируемыми компактными многообразиями, поэтому для комплексного тора наивысшая нетривиальная группа когомологий есть $H^n((\mathbb{C} \setminus \{0\})^n)$, а для проколотого пространства — группа $H^{2n-1}(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$, причем эти группы одномерны. Еще одна общая специфика ядер ω_K и ω_{BM} состоит в том, что их сингулярностями являются наборы из координатных подпространств: наборы гиперплоскостей $\{\zeta_1 = 0\}, \ldots, \{\zeta_n = 0\}$ для ядра Коши и набора из одного нульмерного подпространства $\{\zeta = 0\} = \{\zeta_1 = 0, \ldots, \zeta_n = 0\}$ — для ядра Бохнера-Мартинелли. В связи с этим в [20] было введено следующее

Определение [20], [21]. *Набор (координатных) плоскостей* $\{E_\nu\} \subset \mathbb{C}^d$ *(не обязательно равных размерностей) называется* ***атомарным****, если наивысшая нетривиальная группа когомологий их дополнения является одномерной, т.е.*

$$H^k(\mathbb{C}^d \setminus \bigcup E_\nu) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}, & k = k_0, \\ 0, & k > k_0 \end{cases}$$

для некоторого k_0. *Образующая* ω *группы* $H^{k_0}(\mathbb{C}^d \setminus \bigcup E_\nu)$ *называется* **ядром** *для набора* $\{E_\nu\}$.

Примером не атомарного набора плоскостей служит тройка координатных прямых $\{\zeta_2 = \zeta_3 = 0\}$, $\{\zeta_1 = \zeta_3 = 0\}$, $\{\zeta_1 = \zeta_2 = 0\}$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

Для атомарности набора плоскостей необходимы ограничения комбинаторного характера на их взаимное расположение. Оказывается, если набор кодировать определенным образом в помощью веера (многогранного конического полиэдра в $\mathbb{R}^n$), то он будет атомарным. Таким образом, атомарные наборы тесно связаны с теорией торических многообразий (о теории таких многообразий см. книги Оды [18], Фултона [14], а также [3], [10]–[13], [16], [15]). Частным случаем торических многообразий является комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}_n$. Известно, что ядро Бохнера-Мартинелли в $\mathbb{C}^{n+1}$ тесно связано с формой объема для метрики Фубини-Штуди проективного пространства $\mathbb{CP}_n$ (см. [2] или [4]). А именно, при диагональном действии одномерного тора $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\zeta \to \lambda\zeta$$

форма ω_{BM} преобразуется к виду

$$\omega(\zeta) = \frac{d\lambda}{\lambda} \wedge \omega_0([\zeta])$$

с инвариантной формой $\omega_0([\zeta])$ — формой объема Фубини-Штуди. Общее n-мерное торическое многообразие $\mathbb{X}$, ассоциированное с веером $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, подобно проективному пространству, получается как фактор

$$\mathbb{X} = [\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)]/\mathbb{C}_*^r,$$

где $Z(\Sigma)$ — объединение атомарного набора плоскостей, а $\mathbb{C}_*^r$ — комплексный тор $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^r$.

Проведенные исследования

Одним из центральных результатов, полученных ранее является построение класса интегральных представлений в d-круговых полиэдрах пространства $\mathbb{C}^d$, с ядрами, обобщающими ядро интегрального представления Бохнера-Мартинелли.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^d$ переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$. Соотношения

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{1d}|\zeta_d|^2 = \rho_1, \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{rd}|\zeta_d|^2 = \rho_r \end{cases} \tag{2}$$

при фиксированном $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r) \in \mathbb{R}^r$ определяют множество $\Gamma = \Gamma(\rho)$.

Рассмотрим область $D = D_\rho$ в пространстве $\mathbb{C}^d$ переменных z, определенную системой неравенств

$$|z_{k_1}|^2 + \ldots + |z_{k_m}|^2 < R^{i_1,\ldots,i_n}_{k_1,\ldots,k_m}(\rho), \tag{3}$$

где каждое неравенство соответствует примитивному набору $v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}$ веера Σ, а $R^{i_1,\ldots,i_n}_{k_1,\ldots,k_m}(\rho)$ — образ выражения

$$|\zeta_{k_1}|^2 + \ldots + |\zeta_{k_m}|^2 - c_{i_1}|\zeta_{i_1}|^2 - \ldots - c_{i_n}|\zeta_{i_n}|^2$$

при отображении (2).

Теорема 1 *Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в области W, определяющейся неравенствами*

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{1d}|\zeta_d|^2 < \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{rd}|\zeta_d|^2 < \rho_r, \end{cases}$$

и непрерывна в замыкании W. Тогда в пересечении $D \cap W$, где область D, определяется неравенствами (3), справедливо интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{C} \int\limits_{\Gamma} f(\zeta - z)\omega(\zeta),$$

где цикл $\Gamma = \Gamma(\rho)$ определяется равенствами (2).

Проект будущих исследований

Классической задачей компьютерной алгебры является исключение неизвестных из систем нелинейных уравнений в символьном виде. Для систем алгебраических уравнений одно из таких решений успешно реализовано на основе теории многомерных вычетов [27]–[29]. Однако для широкого класса математических моделей эта проблема возникает и для уравнений более общего вида. Первым этапом ее решения является вычисление степенных сумм корней нелинейной системы. Оказывается, что в ряде случаев методы, развитые ранее, работают и для систем голоморфных функций, имеющих бесконечное множество корней. Здесь могут быть получены конечные формулы для вычисления степенных сумм.

Рассматриваются системы нелинейных уравнений вида:

$$f_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, а f_j — целые или мероморфные функции в $\mathbb{C}^n$. Если f_j являются полиномами, то формулы для вычисления степенных сумм корней через коэффициенты f_j известны (см., например, [27]–[29]). Их вывод основан на теории многомерных вычетов, в частности, логарифмическом вычете и вычете Гротендика. На этих формулах основан метод исключения неизвестных, предложенный Л.А.Айзенбергом [27] и развитый затем в [28].

Как правило, система алгебраических уравнений имеет конечное число корней и поэтому любые степенные суммы корней корректно определены. Если система (4) не алгебраическая, то число корней может стать бесконечным и, следовательно, степенные суммы корней становятся неопределенными.

В качестве этапов проекта планируется исследование следующих задач:

1. Построение класса торических вычетов — аналогов логарифмического вычета и вычета Гротендика с помощью построенного класса интегральных представлений.

2. Построение многомерных аналогов рекуррентных формул Ньютона для неалгебраических систем уравнений на основе построенных многомерных торических вычетов.

3. Разработка методов исключения неизвестных для возможно более широкого класса систем нелинейных уравнений, используя торические вычеты наряду с логарифмическим вычетом и вычетом Гротендика.

4. Компьютерная реализация методов исключения неизвестных из систем нелинейных уравнений.

В качестве результатов планируется получить следующие:

Теорема 2 *Для функции φ, голоморфной в области W справедлива формула*

$$\frac{1}{C'}\int\limits_{\Gamma}\varphi(\zeta)\omega(f(\zeta))=\sum_{a\in E}\mu_a(f)\varphi(a),$$

где E — множество нулей системы $f(\zeta)=0$, а $\mu_a(f)$ — так называемая динамическая кратность нуля a.

Теорема 3 *Для системы уравнений (4), где функции $Q_j(z)$ определены равенствами*

$$Q_j(z)=\sum_{\|\alpha\|<k_j}a^j_\alpha z^\alpha,$$

справедливы следующие рекуррентные формулы Ньютона для всех $m=0,\dots,n$:

$$\sum_{j_1<\dots<j_m}\sum_{\|\alpha^{j_1}+\dots+\alpha^{j_m}\|>\|\beta-k[j_1,\dots,j_m]\|}a^{j_1}_{\alpha^{j_1}}\dots a^{j_m}_{\alpha^{j_m}}\sigma_{\alpha^{j_1}+\dots+\alpha^{j_m}+k[j_1,\dots,j_m]-\beta}$$

$$=\sum_{j_1<\dots<j_m}\sum_{\alpha^{j_1}+\dots+\alpha^{j_m}=\beta-k[j_1,\dots,j_m]}a^{j_1}_{\alpha^{j_1}}\dots a^{j_m}_{\alpha^{j_m}}k_1\dots k_n\left(\frac{\Delta_{\alpha^{j_1}\dots\alpha^{j_m}}}{k_{j_1}\dots k_{j_m}}-1\right),$$

если все компоненты β неотрицательны и

$$\sum_{j_1<\dots<j_m}\sum_{\|\alpha^{j_1}+\dots+\alpha^{j_m}\|>\|\beta-k[j_1,\dots,j_m]\|}a^{j_1}_{\alpha^{j_1}}\dots a^{j_m}_{\alpha^{j_m}}\sigma_{\alpha^{j_1}+\dots+\alpha^{j_m}+k[j_1,\dots,j_m]-\beta}$$

$$=-\sum_{j_1<\dots<j_m}\sum_{\alpha^{j_1}+\dots+\alpha^{j_m}=\beta-k[j_1,\dots,j_m]}a^{j_1}_{\alpha^{j_1}}\dots a^{j_m}_{\alpha^{j_m}}k_1\dots k_n$$

в противном случае.

Также планируется расширить результат теоремы 1 путем рассмотрения торических многообразий, задающихся невыпуклыми веерами, вычислить первую группу когомологий гладких некомпактных торических многообразий любой размерности и получить новые результаты о голоморфном продолжении с гиперповерхностей в торические многообразия.

Преподавательский опыт и педагогические планы

Я преподавал в университете Миссури (Ролла, США) в течение пяти семестров, где читал лекции по курсам "введение в линейную алгебру и аналитическую геометрию", "математический анализ", "обыкновенные дифференциальные уравнения".

Также я преподавал в Красноярском государственном университете и Сибирском федеральном университете. Читал лекции по высшей математике, математическому анализу, дифференциальной геометрии и топологии, теории функций комплексного переменного. Вел спецсеминар по теории функций многих комплексных переменных. Руковожу написанием курсовых работ.

В дальнейшем планирую чтение таких дисциплин, как теория функций действительного переменного, функциональный анализ, специальных курсов по теории функций многих комплексных переменных и теории гомологий. Также планирую осуществлять научное руководство написанием дипломных работ и диссертаций.

Список литературы

[1] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* Новосибирск: Наука, 1979. 366 с.

[2] Гриффитс Ф., Харрис Дж. *Принципы алгебраической геометрии.* М.: Мир, 1982. 860 с.

[3] Данилов В.И. *Геометрия торических многообразий*// УМН 1978. Т. 33. С. 85–134.

[4] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения.* Новосибирск: Наука, 1992. 240 с.

[5] Хенкин Г.М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 7. С. 23–124.

[6] Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ. Ч.2. Функции нескольких переменных.* М.: Наука, 1985. 400 с.

[7] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения.* Новосибирск: Наука, Сиб-ое отд-ие. 1988. 240 с.

[8] Batyrev V., Materov E. *Toric residues and mirror symmetry*// Moscow math. journal. 2002. V. 2. №3. P. 435–475.

[9] Bochner S. *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*// Ann. Math. 1943. V. 44. P. 652–673.

[10] Cox D. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*// J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 17-50.

[11] Cox D. *Toric residues*// Ark. Mat. 1996. V. 34. P. 73–96.

[12] Cox D. *Recent Developments in Toric geometry*// Algebraic Geometry – Santa Cruz 1995. V. 2. J. Kollár, R. Lazarsfeld and D. Morrison, editors. AMS. Providence. RI. 1997. P. 389–436.

[13] Demazure M. *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*// Ann. Sci. École Norm. Sup. 1970. V. 3. P. 507–588.

[14] Fulton W. *Introduction to Toric Varieties.* Princeton U. Press. Princeton, NJ. 1993.

[15] Kemph G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B. *Toroidal Embeddings I.* Lecture Notes in Math. V. 339. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1973.

[16] Khovanskii A. *Newton polyhedra and toroidal varieties*// Funct. Anal. Appl. 1977. V. 11. P. 289–296.

[17] Martinelli E. *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di piú variabili complesse*// Mem. R. Accad. Ital. 1938. V. 9. P. 269–283.

[18] Oda T. *Convex Bodies and Algebraic Geometry.* Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1988.

[19] Poincaré *Sur les résidues des integrales doubles*// Acta Math. 1887. V. 9. P. 312–380.

[20] Tsikh A. *Toric residues*// Proceedings of the conference "Nordan"/ Grand Hötel Saltsjöbaden, Sweden. April 22–25, 1999

[21] Tsikh A. *Some kernels in residue theory*// Workshop "Singularities in Geometry and Analysis"/ St. Marienthal, Uni. Cottbus, Germany. September 24–28, 2002. P. 19.

[22] Кытманов А.А. *Об аналоге представления Бохнера-Мартинелли в d-круговых полиэдрах пространства C^d* // Изв. вузов. Математика – 2005. – №3 (514). – С. 52–58.

[23] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Translated from the Japanese.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) – [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. 15. – Springer-Verlag, Berlin. 1988.

[24] W. Fulton, *Introduction to toric varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. – Princeton University Press, Princeton, NJ. 1993.

[25] Кытманов А.А. *Об аналоге формы Фубини-Штуди для двумерных торических многообразий* // Сиб. матем. журн., Новосибирск, НГУ, 2003. – Т. 44, № 2. – С. 358-371.

[26] Кытманов А.А. *О ядрах интегральных представлений как усреднениях формул Коши* // Вестник КГУ, сер. физ.-мат. науки, Красноярск. – 2003. – вып. 1. – С. 3-9.

[27] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* – Новосибирск: Наука. 1979. – 329 с.

[28] Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М.З. *Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов.* – Новосибирск: Наука. 1991. – 234 с.

[29] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения.* – Новосибирск: Наука. 1989. – 240 с.