План исследования соискателя Лыкова К.В.

1. Проведенные исследования.

В 1951 году Яно опубликовал работу [1], которая стала отправной точкой теории экстраполяции. Мы сформулируем здесь лишь двойственный к теореме Яно результат.

Теорема (Яно, Зигмунд, [2]). *Если линейный оператор T действует в пространствах $L_p[0,1]$ при $p \in [p_0, \infty)$ и $\|T\|_{L_p \to L_p} = O(p^\alpha)$ при $p \to \infty$ и некотором $\alpha > 0$, то T действует из L_∞ в пространство Орлича* $\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}$*:*

$$\|Tx\|_{\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}} \leqslant C \|x\|_{L_\infty}, \ \text{где} \ \|x\|_{\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}} := \sup_{0<t\leqslant 1} \log^{-\alpha}(e/t) x^*(t),$$

$x^*(t)$ *— невозрастающая перестановка функции* $|x(t)|$.

В [1] и [2] также представлены приложения к различным вопросам анализа. После работы Яно появлялись отдельные публикации по экстраполяции (см., например, [3, 4, 5]), но единой унифицирующей теории не было. В конце 80-х — начале 90-х годов прошлого века началась разработка общих подходов теории экстраполяции, связанная прежде всего с именами Яверса и Мильмана [6-9]. В частности, используя введеные ими функторы пересечения Δ и суммы Σ они получили экстраполяционное описание пространств, фигурирующих в теореме Яно (см., например, [8, с. 22-23]):

$$\Delta_{p_0<p<\infty} \left(p^{-\alpha} L_p\right) = \operatorname{Exp} L^{1/\alpha} \text{ и } \Sigma_{1<p<p_0} \left((p-1)^{-\alpha} L_p\right) = L(\log L)^\alpha.$$

Рассмотрим подробнее функтор пересечения Δ. Если $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ — семейство банаховых пространств, непрерывно вложенных в банахово пространство $\mathcal{A}$, то

$$\Delta_{\theta\in\Theta}(A_\theta) = \left\{ a \in \mathcal{A} : \ \|a\|_\Delta = \sup_{\theta\in\Theta} \|a\|_{A_\theta} < \infty \right\},$$

т.е.

$$\|a\|_\Delta = \left\| \|a\|_{A_\theta} \right\|_{L_\infty}, \tag{1}$$

где L_∞ — пространство ограниченных функций на Θ. Согласно Мильману и Яверсу

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}} = \left\| \frac{\|x\|_p}{p^\alpha} \right\|_{L_\infty(p_0,\infty)}, \tag{2}$$

откуда, с учетом простого соотношения $\|x\|_{L_\infty} = \left\| \|x\|_p \right\|_{L_\infty(p_0,\infty)}$, мы сразу получаем теорему Яно.

Соискателем в качестве шкалы $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ рассматривалась шкала пространств L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ на отрезке $[0,1]$. В частности, исследовался вопрос, когда для пространства Орлича L_M (построенного по выпуклой функции $M = M(u)$) выполняется

$$L_M = \Delta_{1\leqslant p<\infty}\left(\omega(p)L_p\right)$$

с некоторой ограниченной измеримой функцией $\omega(p)$.

В работах Мильмана и Яверса вычислены пространства $\Delta_{1\leqslant p<\infty}\left(\omega(p)L_p\right)$ при $\omega(p) \asymp \omega(2p)$ при $p\to\infty$. Соискателем пространства $\Delta\left(\omega(p)L_p\right)$ вычислены при существенно более слабых ограничениях на поведение $\omega(p)$. Приведем здесь формулировки некоторых теорем. Доказательства, примеры и приложения приведены в обзоре [10].

Теорема 1. *Пусть функция $M(u)$ имеет вид*

$$M(u) = e^{N(\log(u))},\ \textit{при}\ u > u_0, \tag{3}$$

с некоторой выпуклой функцией $N = N(t)$, и пространство L_M совпадает с пространством Марцинкевича. Тогда

$$L_M = \Delta\left(\omega(p)L_p\right),\quad \textit{где}\ \omega = \omega(p) = e^{-\frac{N^*(p)}{p}},\quad N^*(p) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{pt - N(t)\}.$$

Напомним определение экстраполяционного функтора Σ, считая, что $A_0 \subset A_\theta \subset A_1$:

$$\Sigma\left(A_\theta\right) := \{a\in A_0 + A_1\ :\ a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n\in A_{\theta_n},\ \text{и}\ \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|_{A_{\theta_n}} < \infty\},$$

с нормой

$$\|a\|_{\Sigma} := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|_{A_{\theta_n}}\ :\ a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(t) \asymp te^{L(\log 1/t)}$ с положительной вогнутой функцией $L(u)$ такой, что $\lim_{u\to\infty}\frac{L(u)}{u} = 0$. Тогда, если пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ есть одновременно пространство Орлича, то*

$$\Lambda(\varphi) = \Sigma_{1<p<p_0}\left(e^{\frac{N^*(p')}{p'}}L_p\right),\quad \textit{где}\ \ N(t) = L^{-1}(t),\ \ p' = \frac{p}{p-1}.$$

Также, как и теорема 1, теорема 2 не следует из результатов общей теории экстраполяции и имеет существенно более широкий спектр приложений.

В работе [9] подробно рассмотрены экстраполяционные функторы $\Delta^{(r)}$:

$$\|x\|_{\Delta^{(r)}(A_\theta)} := \left\{ \int \left[\|x\|_{A_\theta}\right]^r \, d\theta \right\}^{1/r}.$$

Конструкцию $\Delta^{(r)}$ можно получить, заменив в (1) L_∞ на L_r. Еще больше возможностей дает замена L_∞ на произвольную банахову решетку F. Следующее определение предложено С.В.Асташкиным.

Определение. Симметричное пространство E называется **экстраполяционным** (при $p \to \infty$), если найдется такая банахова решетка F функций аргумента $p \in [1, \infty)$, что $\|x\|_E \asymp \| \, \|x\|_{L_p} \, \|_F$. При этом F называется **параметром экстраполяции**.

Некоторые базовые свойства таких пространств сформулированы в [11, 12]. На основе этого определения в [13] были найдены необходимые и достаточные условия экстраполяционности важных в приложениях пространств Марцинкевича и Лоренца, исследованы границы экстраполяционного описания симметричных пространств. Попутно выяснилось весьма интересное обстоятельство, состоящее в том, что нормы многих экстраполяционных в этом смысле пространств E (хотя и не всех) допускают вышеприведенное представление с параметром $F = \tilde{E}$, состоящим из всех функций $x(u)$, измеримых на $[1, \infty)$, таких, что функция $\tilde{x}(t) := x(\log_2 2/t)$ $(0 < t \leqslant 1)$ принадлежит самому E; при этом $\|x\|_{\tilde{E}} = \|\tilde{x}\|_E$. Примерами таких пространств являются упоминавшиеся выше пространства Орлича $\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}$:

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}} \asymp \sup_{0<t\leqslant 1} \log_2^{-\alpha}\left(\frac{2}{t}\right) x^*(t) \asymp \sup_{1<p<\infty} (p^{-\alpha}\|x\|_{L_p}).$$

Такие пространства мы называем **сильно экстраполяционными**, им посвящена работа [14]. Таким образом, в сильно экстраполяционных пространствах мы наблюдаем следующее удивительное явление: нормы функций $x = x(t)$ и $y = y(t) := \|x\|_{p=\log_2 2/t}$ эквивалентны:

$$\|x(t)\|_E \asymp \| \|x\|_{\log_2 2/t} \|_E$$

Общая теория экстраполяции [9] позволяет эффективно вычислять экстраполяционные относительно шкалы $\{L_p\}$ пространства с нормой

$$\|x\| \asymp \left(\int\limits_{p_0}^{\infty} \left(\omega(p)\|x\|_p\right)^r \, dp \right)^{\frac{1}{r}}$$

при $\omega(p) \asymp \omega(2p)$ (это свойство $\omega(p)$ называется в [9] сдержанностью, tempered). Все такие пространства сильно экстраполяционны и, таким образом, попадают под предложенное нами описание.

Следующее определение предложено соискателем. Теорема, сформулированная далее, доказана в [10], см. также более слабый вариант в [14]. Там же представлены примеры и приложения к теории операторов и ортогональным рядам.

Определение. Будем говорить, что параметр экстраполяции F **сдержан** (tempered), если в F ограниченно действует оператор $Df(p) := f(2p)$.

Теорема 3. *Для симметричного пространства E на $[0,1]$ следующие условия эквивалентны: (a) E сильно экстраполяционно; (b) в E ограниченно действует оператор $Sx(t) = x(t^2)$; (c) E экстраполяционно со сдержанным параметром экстраполяции F.*

Из этой теоремы в случае $F = L_\infty(\omega)$ вытекают экстраполяционные соотношения, полученные ранее другими авторами [15-21].

2. Проект будущих исследований.

Соискатель планирует продолжить исследования по экстраполяции. В частности, надеется **получить экстраполяционное описание для широкого класса пространств, близких к L_{p_0} с** $p_0 \in (1,\infty)$, сформулировать и доказать соответствующие экстраполяционные теоремы. Планируется **перенести определение сильно экстраполяционного пространства на случай более общих, чем L_p, интерполяционных шкал**, в том числе на не функциональные пространства. Дело в том, что определение сильно экстраполяционного пространства существенно использует то, что пространство состоит из функций, а возникающие закономерности, по-видимому, имеют более общий характер. Планируется исследовать "обратную" экстраполяционную задачу: возможность восстановления семейства L_p-оценок по двум или даже одной предельной (end point estimate), что, по-видимому, возможно при некоторых дополнительных ограничениях на оператор. В частности, хотелось бы детально изучить **связь между интерполяцией и экстраполяцией**: при переходе от оценок операторов в интерполяционных шкалах к оценкам в "предельных" пространствах, когда мы можем без потерь восстановить по предельным оценкам оценки в интерполяционной шкале?

Планируется больше внимания уделить **приложениям теории экстраполяции**. Соискатель надеется развить теорию экстраполяции "вблизи" пространства L_1 настолько, чтобы продвинутся в решении следующей фундаментальной проблемы гармонического анализа: **описать класс S функций на $[0,1]$, тригонометрический ряд Фурье которых сходится почти всюду**. Вслед за знаменитыми теоремами Л.Карлесона и Р.А.Ханта [22, 23], из которых следует, что в S содержится L_p для всех $p > 1$, П.Шолин [24], а затем Н.Ю.Антонов [25] показали, что в S лежат также некоторые более широкие пространства Орлича. Результат Антонова остается рекордным по сей день. Что же касается квазинормированных пространств, то здесь наибольшим является пространство, построенное в 2002 г. Ариас-Де-Рейна [26]. Последние результаты в этом направлении [27-30] свидетельствуют о важности методов теории экстраполяции операторов.

Другие приложения, которые намеревается затронуть соискатель: теоремы вложения, дифференциальные уравнения [31-37], проблема моментов [38], сходимость ортогональных рядов и мартингалов в пространствах, близких к L_∞ [10, 39-43].

3. Преподавательский опыт и педагогические планы.

Я преподаю с 2003 года на механико-математическом факультете Самарского государственного университета. Среди преподаваемых дисциплин "Теория вероятностей“ (лекционный курс и семинары), "Математический анализ”, "Функциональный анализ“, ”Элементарная математика” (семинары), специальные курсы "Производящие функции“, "Интерполяция операторов”, "p-адический анализ“, "Теория мартингалов”, "Стохастическое интегрирование“, ”Симметричные пространства”. Руковожу курсовыми и дипломными работами. Веду факультативные занятия “Теория меры”, ”Пространства Соболева“ и студенческий кружок, посвященный олимпиадным задачам. Участвовал в качестве руководителя команды и члена жюри во Всероссийских студенческих и школьных математических боях (г.Екатеринбург, г.Тула, г.Сочи). Также работаю в Самарской областной физико-математической школе и Медико-техническом лицее (веду спецкурсы, посвященные олимпиадной тематике, руковожу научными работами).

Планирую организовать факультативный семинар по комбинаторике для младшекурсников и семинар по функциональному анализу для старшекурсников и аспирантов. Для школьников хотелось бы организовать общегородской кружок и способствовать участию команд города Самары во всероссийских и международных мероприятиях высокого уровня (Всероссийский фестиваль юных математиков, Турнир городов), в которых Самара, к сожалению, не участвует.

Список литературы

[1] S. Yano, *An extrapolation theorem,* J. Math. Soc. Japan. 3, No. 2 (1951), 296-305.

[2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды, Т.2,* Москва: Мир, 1965. 538 с.

[3] В.И. Юдович, *О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений,* ДАН СССР 138, No. 4 (1961), 805–808.

[4] И.Б. Симоненко, *Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича,* Матем. сб. 63 (1964), 536-553.

[5] R.A. Kerman, *An integral extrapolation theorem with applications,* Studia Math. 76 (1983), 183-195.

[6] B. Jawerth and M. Milman, *Extrapolation Spaces with applications,* Mem. of the Amer. Math. Soc. 89 (440) (1991), 82 pp.

[7] B. Jawerth and M. Milman, *New Results and Applications of Extrapolation Theory,* Interpolation spaces and related topics, Haifa, 1990. Israel Math. Conference Proc.,5 (1992), 81-105.

[8] M. Milman, *Extrapolation and Optimal Decompositions with Applications to Analysis,* Berlin. Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. 1580 (1994), 162 pp.

[9] G. Karadzhov and M. Milman, *Extrapolation theory: New results and applications,* J. Approx. Theory 133, No. 1 (2005), 38-99.

[10] S.V. Astashkin and K.V. Lykov, *Extrapolation description of rearrangement invariant spaces and related problems,* Preprint. Планируется опубликовать в Proceedings of the international Symposium on Banach and Function Spaces III (September 2009, Japan)

[11] К.В. Лыков, *Экстраполяция в шкале L_p–пространств и сходимость ортогональных рядов в пространствах Марцинкевича,* Вестник СамГУ No. 2 (2006), 28–43.

[12] К.В. Лыков, *Критерий сепарабельности экстраполяционного пространства,* Вестник СамГУ No. 4 (2006), 5–12.

[13] С.В. Асташкин, К.В.Лыков, *Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_∞,* Сиб. матем. ж. 47, No. 5 (2006), 974–992.

[14] С.В. Асташкин, К.В.Лыков, *Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция,* Сиб. матем. ж. 50, No. 2 (2009), 250–266.

[15] D.E. Edmunds and M.Krbec *On decomposition in exponential Orlicz spaces,* / // Math. Nachr. 213 (2000), 77-88.

[16] D.E. Edmunds and M.Krbec *Decomposition and Moser's lemma,* Rev. Matem. Compl. 15, No. 1 (2002), 57–74.

[17] J. Neves, *On decompositions in generalized Lorentz-Zygmund spaces,* Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 4, No.1 (2001), 239-267.

[18] A. Fiorenza and M.Krbec, *On an optimal decomposition in Zygmund spaces,* Georjian Math. Jour. 9, No. 2 (2002), 271-286.

[19] С.В. Асташкин, *Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p-пространств,* Функцион. анализ и его прил. 37, No. 3 (2003), 73-77.

[20] С.В. Асташкин, *Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств,* Матем. сборник 194, No. 6 (2003), 23-42.

[21] С.В. Асташкин, *Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции,* Сиб. матем. ж. 46, No. 2 (2005), 264–289.

[22] L. Carleson, *Convergence and growth of partial sums of Fourier series,* Acta Math. 116 (1966), 135-157.

[23] R.A. Hunt, *On the convergence of Fourier series,* Proceding of Conference at Southern Illinois University, 235-255.

[24] P. Sjolin, *An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series,* Arc. Mat. 7 (1969), 551-570.

[25] N.Y. Antonov, *Convergence of Fourier series,* East J.Approx. 2 (1996), 187-196.

[26] J. Arias-De-Reyna, *Pointwise convergence of Fourier series,* J. London Math. Soc. (2) 65 (2002), 139-153.

[27] F. Soria, *On an extrapolation theorem of Carleson-Sjolin with application to a.e. convergence of Fourier series,* Studia Math. 94 (1989), 235-244.

[28] M. Carro, *New extrapolation estimates,* Journal of Functional Analysis 174 (2000), 155-166.

[29] M. Carro, *From restricted weak type to strong type estimates,* J. London Math. Soc. (2) 70 (2004), 750-762.

[30] M. Carro, L. Colzani and G. Sinnamon, *From restricted type to strong type estimates on quasi-Banach rearrangement invariant spaces,* Studia Math 182 (1) (2007), 1-27.

[31] А.Е. Мамонтов, *Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро и медленно растущими $N-$функциями,* Актуальные проблемы современной математики. НГУ. Т. 2. (1996), 95-103.

[32] А.Е. Мамонтов, *Шкалы пространств L_p и их связь с пространствами Орлича,* Вестник НГУ. Серия "Математика, механика, информатика" 6, No. 2 (2006), 33-56.

[33] А.Е. Мамонтов, *О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье-Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости, I* Сиб. матем. ж. 40, No. 2 (1999), 408-420.

[34] А.Е. Мамонтов, *О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье-Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости, II,* Сиб. матем. ж. 40, No. 3 (1999), 635-649.

[35] А.Е. Мамонтов, *Интегральные представления и преобразования N–функций, I,* Сиб. матем. ж. 47, No. 1 (2006), 123-145.

[36] А.Е. Мамонтов, *Интегральные представления и преобразования N–функций, II,* / А.Е.Мамонтов // Сиб. матем. ж. 47, No. 4 (2006), 811-830.

[37] A.E. Mamontov, *Extrapolation from L_p into Orlicz spaces via integral transforms of Young functions,* Journal of Analysis and Applications 4, No. 42 (2006), 77-118.

[38] С.В. Асташкин, К.В.Лыков, *О границах применимости экстраполяционных методов,* Материалы конференции Воронежской зимней математической школы, Воронеж, 2009. 14-15.

[39] E. Ostrovsky, *Exponential Orlicz Spaces: new Norms and Applications,* Electronic Publ., arXiv/FA/0406534, v.1, 25.06.2004.

[40] E. Ostrovsky, *A remark on the inequalities of Bernstein-Markov type in exponential Orlicz and Lorentz spaces,* Electronic Publ., arXiv/FA/0411617, v.1, 27.11.2004.

[41] E. Ostrovsky, *Some new moment rearrangement invariant spaces; theory and applications,* Electronic Publ., arXiv/FA/0605732, v.1, 29.05.2006.

[42] С.Ф. Лукомский, *О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L_∞,* Матем. заметки 70, No. 6 (2001), 882-889.

[43] S.F. Lukomskii, *Convergence of Fourier series in Lorentz spaces,* East J. on Approx. 9, No. 2 (2003), 229-238.