План исследований (Research Statement)

Аннотация работы Манаповой Айгуль Рашитовны "Нелинейные модели оптимизации и их конечномерные аппроксимации для эллиптических и параболических уравнений с управлениями в коэффициентах".

Настоящая работа является циклом статей, опубликованных в 2005-2009 гг. В данных статьях исследовались нелинейные задачи оптимального управления для эллиптических и параболических уравнений. Основным объектом изучения являлись разностные и дифференциально-разностные аппроксимации нелинейных задач оптимального управления процессами, описываемыми линейными и нелинейными уравнениями эллиптического и параболического типа, в которых отображение $g \to u(g)$ из множества допустимых управлений U в пространство состояний W является нелинейным. При исследовании таких задач (особенно задач с управлениями в старших коэффициентах, являющихся "сильно нелинейными"оптимизационными задачами и существенно отличающимися от задач, где управления осуществляются путем внешних воздействий на систему) возникает ряд трудностей, связанных с их нелинейностью, некорректностью, невыпуклостью и малой гладкостью состояний. Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы. Правильно построенная аппроксимация позволяет получить содержательные результаты качественного и численного характера об изучаемом процессе. Центральными здесь являются вопросы "конструирования аппроксимаций", сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций. Представляемая работа состоит из нескольких серий. В первой из них исследуются нелинейные задачи оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в переменных коэффициентах уравнения состояния. Рассмотрены как локальные, так и интегральные ограничения на управления. Функционалы цели соответствуют оптимизации по некоторому конечному числу критериев качества. Вторая серия посвящёна задачам оптимального управления, описываемым начально-краевой задачей для квазилинейного уравнения параболического типа. В третьей серии изучаются задачи оптимального управления системами нелинейного типа с распределенными параметрами, описываемыми квазилинейными уравнениями эллиптического типа с переменными коэффициентами, учитывающими анизотропность сред, с управлением в правой части уравнения в произвольных выпуклых областях. Ниже мы даем описание результатов, полученных в рамках каждой из серий.

Задачи оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений. Опишем вначале постановку задачи. Пусть управляемые процессы описываются в области $\Omega = \big\{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1,2\big\}$ с границей Γ следующей задачей Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптичекого типа:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left(k(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} + d(\xi)q(u) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega, \qquad u(\xi) = 0, \qquad \xi \in \Gamma, \tag{1.1}$$

где q, f - известные функции; $g = \big(g_0, g_1, g_2, g_3\big) = \big(k, b_1, b_2, d\big)$ - управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $f \in L_2(\Omega)$, функция q определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям $q(0) = 0, \quad 0 \le q_0 \le \big[q(s_1) - q(s_2)\big]/(s_1 - s_2) \le L_q < \infty, \quad$ для всех $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad s_1 \ne s_2$.

Введем множество допустимых управлений $U^{(0)} = \prod_{k=0}^{3} U_k \subset B = W^1_\infty(\Omega) \times (L_2(\Omega))^3$, $U_0 = \left\{k \in W^1_\infty(\Omega) : 0 < \nu \le k(\xi) \le \overline{\nu},\ \left|\frac{\partial k}{\partial \xi_\alpha}\right| \le R_\alpha,\ \alpha = 1,2, \text{ п.в. на } \Omega\right\}$, $U_\alpha = \big\{b_\alpha \in L_2(\Omega) :$

$\zeta_\alpha \le b_\alpha(\xi) \le \overline{\zeta}_\alpha$ п.в. на $\Omega\big\}$, $\quad \alpha = 1,2$, $U_3 = \big\{d \in L_2(\Omega) : \zeta_3 \le d(\xi) \le \overline{\zeta}_3$ п.в. на $\Omega\big\}$.

Предполагается выполнение следующих условий: $-m \le \zeta_1 \le \overline{\zeta}_1 \le m$, $-p \le \zeta_2 \le \overline{\zeta}_2 \le p$, $\overline{\nu}$, R_α, $m, p = \mathtt{const} > 0$, ζ_3, $\overline{\zeta}_3$ - некоторые постоянные; $\delta_0 = \max\limits_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \le \nu}} \left\{ \dfrac{\nu - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{C_\Omega^2} + \lambda - \dfrac{m^2}{4\epsilon_1} - \dfrac{p^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0$, $\quad C_\Omega^2 = \left(\dfrac{8}{l_1^2} + \dfrac{8}{l_2^2} \right)^{-1}$; здесь λ любая из следующих констант: 1) $\lambda = q_0\zeta_3$, $\quad \zeta_3 \ge 0$; 2) $\lambda = \zeta_3$ - любая константа, когда $q(u) = u$; 3) $\lambda = -L_q\zeta_0$, где $\zeta_0 = \max\left\{|\zeta_3|, |\overline{\zeta}_3|\right\}$.

Под решением задачи (1.1) при фиксированном управлении $g \in U^{(0)}$ понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) = V$, удовлетворяющая для $\forall \eta \in V$ тождеству

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{\alpha=1}^{2} k(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \eta + d(\xi) q(u) \eta \right\} d\Omega = \int\limits_\Omega f(\xi) \eta \, d\Omega. \qquad (1.3)$$

Рассмотрим следующие нелинейные задачи оптимального управления.

Задача $\mathbf{A^{(0)}}$. Найти управление $g_* \in U^{(0)}$ такое, что $J(g_*) = \inf\limits_{g \in U^{(0)}} J(g) = J_*^{(0)}$, где функционал $J : U^{(0)} \to \mathbb{R}^1$ имеет вид

$$g \mapsto J(g) = \alpha_0 \int\limits_\Omega \rho\, u \, d\Omega + \alpha_1 \int\limits_\Omega |u - u_0|^2 \, d\Omega + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{2} \alpha_{k+1} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi_k} - \psi_k \right|^2 d\Omega, \qquad (1.4)$$

где $u \in V$ - решение задачи состояния (1.3), $u_0, \psi_k \in W_2^1(\Omega)$, $k = 1,2$, $\rho \in L_2(\Omega)$ - заданные функции, $\alpha_m = \mathtt{const} \ge 0$, $m = 0,1,2,3$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0$.

Сузим множество допустимых управлений U_0 для компоненты k вектор-функции управления g до множества $\hat{U}_0 = \left\{ k \in U_0 : \int\limits_\Omega k(\xi)\, d\xi = M \right\}$. Определяя множество $U^{(1)}$ для управления g в виде $U^{(1)} = \hat{U}_0 \times U_1 \times U_2 \times U_3 \subset U^{(0)} \subset B$, поставим следующую задачу оптимального управления.

Задача $\mathbf{A^{(1)}}$. Найти управление $g_* \in U^{(1)}$ такое, что $J(g_*) = \inf\limits_{g \in U^{(1)}} J(g) = J_*^{(1)}$, где функционал цели $J : U^{(1)} \to \mathbb{R}^1$ имеет вид (1.4).

Сузим теперь множество допустимых управлений U_0 для компоненты k вектор-функции управления g до множества $\hat{U}_0(p) = \left\{ k \in U_0 : \int\limits_\Omega k^p(\xi)\, d\xi \le M^p |\Omega|, \quad \nu \le M \le \overline{\nu} \right\}$, где $|\Omega| = \mathtt{mes}\Omega$ - мера множества Ω, $p \ge 1$ - целое число. Определяя теперь для управления g множество допустимых управлений в виде $U^{(2)} \equiv U^{(2)}(p) = \hat{U}_0(p) \times U_1 \times U_2 \times U_3 \subset U^{(0)} \subset B$, $\qquad p \ge 1$, придем к следующей постановке задачи оптимального управления.

Задача $\mathbf{A^{(2)} = A^{(2)}(p)}$. Найти управление $g_* \in U^{(2)} \equiv U^{(2)}(p)$ такое, что $J(g_*) = \inf\limits_{g \in U^{(2)}(p)} J(g) = J_*^{(p)}$, где $p \ge 1$ - целое число, функционал цели $J : U^{(2)}(p) \to \mathbb{R}^1$ имеет вид (1.4).

Поставленные нелинейные модели оптимизации включают в себя, в качестве частных вариантов постановок, большой круг конкретных содержательных прикладных оптимизационных задач теории упругости, теплопроводности, конвекции-диффузии-реакции (при соответствующей конкретизации уравнений состояний, управляющих воздействий, ограничений на управления и функционалов цели), соответствующих оптимизации процессов по конечному числу критериев качества.

Описанные выше задачи исследовались в работах [1], [2] и [4]. Был исследован вопрос корректности постановок рассматриваемых нелинейных задач оптимизации. В связи с численным решением поставленных нелинейных задач оптимального управления построены конечномерные разностные аппроксимации нелинейных моделей оптимизации на обобщенных решениях уравнений состояний. Причем для аппроксимации уравнений состояний предложены некоторые "модифицированные"разностные схемы, отличные от известных в научной литературе традиционных схем другим способом задания переменных сеточных коэффициентов в главной части сеточного оператора. Исследованы вопросы сходимости аппроксимаций: установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу и сходимость аппроксимаций по управлению. Оценки точности и сходимость по управлению получены без дополнительных априорных предположений о гладкости обобщенных решений для состояний процессов управления (при той естественной, незавышенной степени гладкости входных данных и управлений, при которых гарантируются теоремы о обобщенной разрешимости как задач для состояния в классах Соболева, так и задач управления). Проведена регуляризация предложенных аппроксимаций, позволяющая, на основе полученных результатов, строить минимизирующие последовательности для функционалов цели нелинейных задач оптимального управления, сильно сходящиеся в пространствах управлений к множествам точек минимумов функционалов исходных постановок. Все полученные результаты о сходимости конечномерных аппроксимаций не зависят от способа решения конечномерных сеточных задач оптимального управления.

В статье [5] были разработаны алгоритмы численного решения сеточных задач оптимального управления, аппроксимирующие описанные выше нелинейные задачи оптимального управления. Построенные алгоритмы численной минимизации сеточных функционалов основаны на методах проекции градиента, проекции сопряженных градиентов, условного градиента, локальных вариаций (методе Хука-Дживса), а также на комбинации метода штрафных функционалов и градиентных методов. Вычисление градиентов сеточных функционалов базируется на решении соответствующих вспомогательных линейных сопряженных задач. Проведены вычислительные эксперименты численного решения модельных задач оптимального управления, иллюстрирующие применение разработанных в работе методов.

Результаты статьи [6] усиливают результаты, установленные в отмеченных выше работах. Данная статья посвящена исследованию задач оптимального управления системами нелинейного типа с распределенными параметрами, описываемыми квазилинейными уравнениями эллиптического типа с переменными коэффициентами, учитывающими анизотропность сред, с управлениями в свободном члене и коэффициентах уравнения состояния (в том числе когда управления содержатся в старших коэффициентах уравнения). Построены разностные аппроксимации исходных экстремальных задач и установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций. Причем нелинейная краевая задача в задачах оптимизации описывает широкие классы моделей для состояний, например, стационарные процессы теплопроводности, диффузии, фильтрации, электричества, теории упругости и т.д., учитывает достаточно общий характер изменения среды, занимающей область Ω - неоднородность и анизотропию по отношению к рассматриваемому процессу переноса субстанции (энергии, вещества и т.д.), а также активность среды Ω, как с линейным так и с нелинейным взаимодействием. Иначе говоря, предполагается, что перенос субстанции (тепла, вещества и т.д.) в области Ω зависит не только от положения точки ξ, но и от направления. Этот факт отражен в зависимости коэффициента теплопроводности (диффузии) среды также от направления, в котором происходит передача энергии (вещества), а именно, k_α - коэффициент теплопроводности (диффузии) вдоль оси ξ_α, $\alpha = 1, 2$. Учет анизотропии среды в задачах оптимизации систем оказывает существенное влияние на распределение субстанции в среде (тепловой энергии, концентрации, электричества и др.). Пренебрежение анизотропией среды в ряде случаев просто недопустимо (например, для сред с волокнистым строением).

Задачи оптимального управления коэффициентами квазилинейных параболических уравнений. Опишем вначале общую постановку задачи. Пусть задача оптимального управления описывается начально-краевой задачей для квазилинейного уравнения параболического типа:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(k(\xi)\,\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + d(\xi)q(u) = f(\xi,t), \quad (\xi,t) \in Q_T,\\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T), \qquad u(\xi,0) = \varphi(\xi), \quad \xi \in (0,l).\end{gathered} \tag{2.1}$$

В (2.1) предполагаются заданными область $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, функции f, φ, q, а вектор функция $g = (k,d)$ - управление, принадлежащее множеству допустимых управлений U, которое учитывает ограничения как поточного, так и интегрального типа (в том числе изопериметрическое ограничение). В качестве функционала цели выбирается квадратичный функционал $J(g) = \int\limits_0^l |u(\xi,T;g) - u_0(\xi)|^2\, d\xi$, где u_0 - заданная функция.

Описанная задача изучалась в [3]. Была исследована корректность постановки экстремальной задачи. Предложена дифференциально-разностная аппроксимация задачи оптимального управления. Исследованы вопросы корректности аппроксимаций, сходимость аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению. На основе метода Тихонова проведена регуляризация аппроксимаций. Полученные результаты не зависят от способа решения аппроксимирующих экстремальных задач и используют лишь те минимальные ограничения на входные данные и управления, которые гарантируют лишь обобщенную разрешимость задачи для состояния и разрешимость задачи оптимального управления.

Задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области. Начнём с описания постановки одной из рассмотренных задач, что позволит нам продемонстрировать основные идеи. Пусть управляемый процесс описывается задачей Дирихле с переменными коэффициентами:

$$\begin{gathered}Lu = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left(k_\alpha(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} + d(\xi)q(u) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega,\\ u(\xi) = 0, \qquad \xi \in \Gamma,\end{gathered} \tag{3.1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ произвольной формы. Будем предполагать, что Ω – выпуклая область с границей Γ, принадлежащей классу C^2; $k_\alpha, b_\alpha, d, q,\ \alpha = 1,2$ – заданные функции; $g = f \in H = L_2(\Omega)$ - управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha \in W^1_\infty(\Omega)$ и $k_\alpha(\xi) \geq \nu > 0$, $\alpha = 1,2$, $\xi \in \Omega$, $b_\alpha \in L_\infty(\Omega) : \zeta_\alpha \leq b_\alpha(\xi) \leq \overline{\zeta}_\alpha$ п.в. на Ω, $\alpha = 1,2$; $d \in L_\infty(\Omega) : \zeta_3 \leq d(\xi) \leq \overline{\zeta}_3$ п.в. на Ω; q определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, $q(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq \big[q(s_1) - q(s_2)\big]/(s_1 - s_2) \leq L_q < \infty$, для всех $s_1, s_2 \in \mathbb{R},\ s_1 \neq s_2$.

Поставим следующую задачу: на решениях задачи (3.1), отвечающих всевозможным допустимым управлениям $g \in U \subset H = L_2(\Omega)$, $U = \big\{f \in L_2(\Omega) : \zeta_4 \leq f(\xi) \leq \overline{\zeta}_4$ п.в. на $\Omega\big\}$ или $U = \big\{f \in L_2(\Omega) : \|f\| \leq R\big\}$ минимизировать функционал $J(g) = \int\limits_\Omega |u(\xi,g) - u_0(\xi)|^2\, d\Omega$.

Здесь $u_0 \in W^1_2(\Omega)$ - заданная функция, а $R, \nu,\ \zeta_k, \overline{\zeta}_k,\ k = \overline{1,4}$ - заданные числа, $R > 0$; п.в. - почти всюду. Предполагается выполнение следующих условий: $-m \leq \zeta_1 \leq \overline{\zeta}_1 \leq m,\quad -q \leq \zeta_2 \leq \overline{\zeta}_2 \leq q,\quad m, q = \mathtt{const} > 0;\quad \zeta_k \leq \overline{\zeta}_k,\quad \zeta_k, \overline{\zeta}_k = \mathtt{const}, k = 3,4;$

$$\delta_0 = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \le \nu}} \left\{ \frac{\nu - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\epsilon_1} - \frac{p^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0; \quad D = diam\, \Omega.$$

В работах [7], [8] был разработан общий подход, позволяющий исследовать разностные аппроксимации нелинейных экстремальных задач в произвольных выпуклых областях. Установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций.

Проект будущих исследований

Дальнейшее изучение задач оптимального управления в произвольных областях представляет существенный интерес. Поэтому следующий этап в изучении задач оптимального управления будет посвящен исследованию разностных аппроксимаций в задачах оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с частными производными эллиптического и параболического типов в произвольных выпуклых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, где в качестве управлений выбираются коэффициенты уравнений состояния. Параллельно планирую заниматься вопросами, связанными с оптимизацией задач химической кинетики, а также построением алгоритмов оптимизации и их численной реализацией на быстродействующих ЭВМ.

Преподавательский опыт и педагогические планы

В 2009/10 учебном году я читаю курс "Программирование"студентам первого курса и спецкурс "Применение пакета прикладных программ для решения задач вычислительной математики"студентам третьего курса, веду практические занятия по курсу "Информатика"на первых и вторых курсах. Курсы читаются на физическом и математическом факультетах Башкирского государственного университета.

Список литературы

[1] Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О разностных аппроксимациях и регуляризации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Вестник Башкирского Университета. 2005. №3. С. 9-14.

[2] Ф.В. Лубышев, А.Р. Манапова. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 3. С. 376-396.

[3] Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов, А.Р. Манапова. О дифференциально-разностных аппроксимациях и регуляризации задач оптимального управления коэффициентами квазилинейных параболических уравнений // Материалы Уфимской международной математической конференции, посвященной памяти А.Ф. Леонтьева. Т.2 Уфа: ИМВЦ, 2007. С. 35.

[4] Lubyshev F.V., Manapova A.R. DIFFERENCE APPROXIMATIONS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH CONTROLS INVOLVED COEFFICIENTS AND THEIR CONVERGENCE // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева: Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2008. С. 616.

[5] А.Р. Манапова. Численное решение некоторых задач оптимизации для квазилинейных эллиптических уравнений // Т. СВМО, 2008, Т.10, №1. - С. 210-222.

[6] Ф.В. Лубышев, А.Р. Манапова, М.Э. Файрузов. О некоторых задачах оптимального управления в неоднородных анизотропных средах и их разностных аппроксимациях // Т. СВМО, 2008, Т.10, №2. С. 155-166.

[7] Ф.В. Лубышев, А.Р. Манапова. О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области // Т. СВМО, 2009, Т.11, №1. С. 133-144.

[8] Ф.В. Лубышев, А.Р. Манапова Точность аппроксимаций задач оптимального управления, описываемых квазилинейными эллиптическими уравнениями для произвольных областей. // Материалы второй международной научной конференции "Математическое моделирование и дифференциальные уравнения". Минск: 2009.