План исследования

1. Ранее мы построили и изучали некоторые модели, являющиеся обобщением классических моделей Фридмана и Маркова-Пойа ([1], [2]). Для этих моделей установлена связь распределений числа шаров каждого цвета, извлечённых за первые n шагов, с вероятностями выполнения линейных неравенств для независимых показательно распределённых случайных величин. Приведём формулировки некоторых результатов.

1) **Урновая модель.** Первоначально в урне находится w_0 шаров белого цвета и b_0 шаров чёрного цвета (будем говорить: состав урны есть (w_0, b_0)). Шаг процесса состоит в следующем: из урны наудачу извлекается шар и в зависимости от его цвета изменяется содержимое урны. Вероятность извлечения из урны шара данного цвета считаем равной доле шаров этого цвета в урне.

Пусть состав урны перед извлечением очередного шара есть (w_i, b_j). Правила изменения состава шаров могут быть такими: 1) если извлечён белый шар, то состав урны становится равным (w_{i+1}, b_j), а если чёрный, то (w_i, b_{j+1}); 2) если извлечён белый шар, то содержимое урны становится (w_i, b_{j+1}), а если чёрный, то (w_{i+1}, b_j). Каждое правило определяет свою модель, которые мы будем называть моделью $МП\left((w_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}\right)$ и моделью $\Phi\left((w_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}\right)$ соответственно. В случае если w_n и b_n являются линейными (не постоянными) функциями n, то при использовании первого правила получаем классическую урновую модель Маркова-Пойа, а при использовании второго правила – модель Фридмана. Если $w_n = w$, $b_n = b$ при всех n, то получаем схему Бернулли с параметром $p = \dfrac{w}{w+b}$. Справедливо соотношение между моделями: $МП\left((w_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}\right) = \Phi\left((1/w_n)_{n=0}^{\infty}, (1/b_n)_{n=0}^{\infty}\right)$. Положим $J_s = 1$, если на s-м шаге процесса из урны извлечён белый шар, и $J_s = 0$, если извлечён чёрный шар (шаги нумеруем, начиная с нуля).

Теорема 1. *Пусть* $(J_n)_{n=0}^{\infty}$ *– последовательность индикаторов цветов извлечённых шаров в модели* $МП\left((w_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}\right)$, $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ *– последовательности независимых показательно распределённых случайных величин параметры которых образуют последовательности* $(w_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$. *Тогда* $\mathbf{P}\left\{\sum_{s=0}^{n} J_s \le k\right\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=0}^{n-k} X_i - \sum_{j=0}^{k} Y_j \le 0\right\}$, $k = 0,1,...,n$, $n \in \mathbf{N}$.

Теорема 2. *Пусть в модели* $\Phi\left((w_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}\right)$ *выполнены соотношения:* $\sum_{i=0}^{n} w_i = an^q + o(n^{q-0,5})$, $\sum_{i=0}^{n} b_i = bn^q + o(n^{q-0,5})$ *при* $n \to \infty$, *где* $q > 0,5$. *Тогда распределение случайной величины* $\dfrac{\sum_{s=0}^{n} J_s - An}{B\sqrt{n}}$, *где* $A = \dfrac{a^{1/q}}{a^{1/q} + b^{1/q}}$, $B = \dfrac{a^2(1-A)^{2q-1} + b^2 A^{2q-1}}{q(a(1-A)^{q-1} + bA^{q-1})}$, *при* $n \to \infty$ *слабо сходится к стандартному нормальному распределению.*

2) **Многомерная урновая модель.** Следующая модель является многомерным обобщением модели $МП\left((w_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}\right)$. Пусть $\left(w_n^{(i)}\right)_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2, ..., d$ – последовательности положительных чисел. Имеется урна, первоначально содержащая $w_0^{(i)}$ шаров i-го цвета, $i = 1, 2, ..., d$ (будем говорить: урна состава $\left(w_0^{(1)}, w_0^{(2)}, ..., w_0^{(d)}\right)$). Пусть состав урны перед началом n-го шага есть $\left(w_{i_1}^{(1)}, w_{i_2}^{(2)}, ..., w_{i_d}^{(d)}\right)$. На n-м шаге из урны извлекается шар. Если этот шар j-го цвета, то состав урны становится равным $\left(w_{i_1}^{(1)}, ..., w_{i_{j-1}}^{(j-1)}, w_{i_j+1}^{(j)}, w_{i_{j+1}}^{(j+1)}, ..., w_{i_d}^{(d)}\right)$. Вероятность извлечения из урны шара i-го цвета считаем равной доле шаров этого цвета в урне.

Известная многомерная модель Маркова-Пойа ([1]) получается, когда члены всех последовательностей $\left(w_n^{(i)}\right)_{n=0}^{\infty}$ растут как линейные (непостоянные) функции от n.

Пусть $\left(J_n^{(1)}, J_n^{(2)}, ..., J_n^{(d)}\right)$ – вектор, i-я координата которого равна единице, если на n-м шаге извлечён шар i-го цвета, а остальные его координаты равны нулю, и пусть $\left(X_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(\left(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, ..., X_n^{(d)}\right)\right)_{n=0}^{\infty}$ – последовательность случайных векторов, в которой все случайные величины $X_n^{(i)}$ независимы и имеют показательные распределения с параметрами $w_n^{(i)}$ соответственно.

Теорема 3. *При любых неотрицательных целых* n, $k_1, k_2, ..., k_d$, $k_1 + k_2 + ... + k_d = n+1$, *справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{s=0}^{n} J_s^{(i)} = k_i, \quad i = 1, 2, ..., d\right\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{s=0}^{k_i} X_s^{(i)} - \sum_{s=0}^{k_j+1} X_s^{(j)} \le 0, \quad i, j = 1, 2, ..., d\right\}.$$

Теорема 5 позволяет провести исследование асимптотического поведения распределения вектора $\left(\sum_{s=0}^{n} J_s^{(i)}\right)_{i=1}^{d}$ чисел извлечённых шаров всех цветов, когда число шагов процесса стремится к бесконечности. Локальная предельная теорема о сходимости к нормальному распределению получена в [3].

Результаты, полученные в модели $\Phi\left(\left(w_n\right)_{n=0}^{\infty}, \left(b_n\right)_{n=0}^{\infty}\right)$, мы применили для изучения распределения числа l-возрастаний в случайной перестановке.

Пусть на множестве S_n всех перестановок элементов 1, 2, …, n задано равномерное распределение вероятностей и $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n) \in S_n$ – случайная перестановка. Пара (π_i, π_{i+1}) называется l-возрастанием в перестановке π, если $\pi_{i+1} > \pi_i + l$. Обозначим через $D_{n,l}$ число l-возрастаний в перестановке π. Тогда $D_{n,l}$ – случайная величина, определённая на множестве S_n. Можно доказать, что $D_{n,l}$ распределена так же, как случайная величина $\sum_{s=0}^{n-l} J_s$ в модели $\Phi\left(\left(w_n\right)_{n=0}^{\infty}, \left(b_n\right)_{n=0}^{\infty}\right)$ с параметрами $w_n = n+1$, $b_n = n+l+1$. Это позволяет провести полное исследование асимптотического поведения распределения случайной величины $D_{n,l}$ ([4], [5]).

3) **Обобщение дискретных цепей Маркова.** Наконец, рассмотрим следующую модель случайного процесса, обобщающую в некотором направлении дискретные однородные цепи Маркова с конечным множеством состояний ([6]).

Пусть $\left(V, D, init, fin\right)$ – ориентированный мультиграф, где $V = \{1, 2, ..., d\}$ – конечное множество вершин, D – конечное множество дуг, $init$ и fin – отображения из D в V; отображение $init$ ставит в соответствие каждой дуге $e \in D$ её начало, а отображение fin – её конец. Используем обозначения: $out(v) = \{e \in D \mid init(e) = v\}$, $in(v) = \{e \in D \mid fin(e) = v\}$. Предполагаем, что $out(v) \ne \varnothing$ для всех вершин $v \in V$.

Модель представляет собой марковский процесс с дискретным временем и дискретным множеством состояний. Состояниями процесса являются упорядоченные тройки (s, v, m), где $s, v \in V$, m – отображение, которое каждой дуге $e \in D$ ставит в соответствие такое неотрицательное целое число $m(e)$, что выполнено соотношение $\sum_{e \in out(u)} m(e) - \delta_{s,u} = \sum_{e \in in(u)} m(e) - \delta_{u,v}$ для всех $u \in V$ (δ – символ Кронекера). Начальными состояниями являются состояния, в которых $m(e) = 0$ для всех $e \in D$ и $v = s$, $\left(p_s\right)_{s \in V}$ – начальное распределение.

Пусть каждой дуге $e \in D$ поставлена в соответствие последовательность положительных чисел $\left(\lambda_n^e\right)_{n=0}^{\infty}$ и E_n обозначает состояние процесса в момент времени n, $n = 0, 1, 2, ...$. Переходные вероятности задаются условиями: если $m(e) = m'(e) + \delta_{e,e'}$ для всех $e \in D$, где $e' \in D$ – фиксированная дуга, $init(e') = u$, $fin(e') = v$, то

$$\mathbf{P}\{E_{n+1}=(s,\,v,\,m)\mid E_n=(s,\,u,\,m')\}=\frac{\lambda^{e'}_{m(e')}}{\sum\limits_{e\in out(u)}\lambda^{e}_{m(e)}};$$

вероятности остальных переходов равны нулю.

Модели можно придать следующую интерпретацию. Вначале частица попадает в одну из вершин s множества V, которая выбирается наудачу в соответствии с распределением $\left(p_s\right)_{s\in V}$. В дискретные моменты времени она переходит по дугам из вершины в вершину. Переходные вероятности зависят от текущей вершины u и чисел переходов $m(e)$ по дугам $e\in out(u)$, совершённых в предыдущие моменты времени. Величины $\lambda^{e}_{m(e)}$ задают интенсивности дуг. Вероятность перехода по дуге пропорциональна её интенсивности. При k-м переходе по дуге e её интенсивность изменяется с λ^{e}_{k-1} на λ^{e}_{k}.

Поставим в соответствие каждой дуге $e\in D$ последовательность $\left(X^{e}_{n}\right)_{n=0}^{\infty}$ независимых показательно распределённых случайных величин с параметрами $\left(\lambda^{e}_{n}\right)_{n=0}^{\infty}$, причём для различных дуг величины также независимы. Положим $S^{e}_{k}=\sum\limits_{i=0}^{k}X^{e}_{i}$,

$$P_{u,\,v}=\sum_{e\in out(u)\bigcap in(v)}\mathbf{P}\left(\bigcap_{e'\in in(v)\setminus\{e\}}\left\{S^{e'}_{m(e')}<S^{e}_{m(e)}<S^{e'}_{m(e')+1}\right\}\right).$$

Рассмотрим матрицу $L=\left(l_{uv}\right)_{u,\,v=1}^{d}$, $l_{uv}=-P_{u,\,v}$ при $u\neq v$, $l_{uu}=\sum\limits_{v\neq u}P_{u,\,v}$.

Теорема 4. *В описанной модели вероятность перехода из начального состояния* $(s,\,s,\,o)$ *(o – нулевое отображение) в состояние* $(s,\,v,\,m)$ *равна* $\det L_{v,\,v}$*, где* $L_{v,\,v}$ *есть определитель матрицы, полученной из* L *вычёркиванием строки и столбца с номером* v.

Дискретные однородные цепи Маркова с конечным множеством состояний можно рассматривать как частный случай описанной модели. Именно, пусть граф $\left(V,\,D,\,init,\,fin\right)$ удовлетворяет условию $|\,out(u)\bigcap in(v)\,|\leq 1$ для всех $u,\,v\in V$ и все последовательности $\left(\lambda^{e}_{n}\right)_{n=0}^{\infty}$ постоянны. Отождествим все состояния вида $(s,\,v,\,m)$ с одним состоянием v. Тогда наша модель переходит в дискретную однородную цепь Маркова с множеством состояний V, начальным распределением $\left(p_s\right)_{s\in V}$ и переходными вероятностями, $\mathbf{P}\{E_{n+1}=v\mid E_n=u\}=\dfrac{\lambda^{e'}_{0}}{\sum\limits_{e\in out(u)}\lambda^{e}_{0}}$, если $out(u)\bigcap in(v)=\{e'\}$ и $\mathbf{P}\{E_{n+1}=v\mid E_n=u\}=0$, если $out(u)\bigcap in(v)=\varnothing$. Теорема 5 является обобщением результатов Н. В. Смирнова, О. В. Сарманова и В. К Захарова о цепях Маркова ([7]).

В заключение отметим, что утверждения, аналогичные утверждениям теорем 1, 3 справедливы и в некоторых моделях, в которых случайные величины X_n, Y_n имеют распределение, отличное от показательного([8], [9]).

2. Объединяет все полученные ранее результаты метод исследования: рассматривается экспоненциальное распределение вероятностей в многомерном симплициальном конусе или равномерное распределение вероятностей на множестве точек выпуклого многогранника (а также некоторые другие распределения: дискретное равномерное, геометрическое, комбинации перечисленных распределений). Показательным распределением в симплициальном конусе K_0 мы называем распределение случайного вектора $\left(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n\right)$, компоненты которого есть независимые показательно распределённые случайные величины. Это распределение обладает свойством: для любого симплициального конуса K, содержащегося в K_0, условное распределение вектора $\left(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n\right)$ при условии попадания в K также является показательным. Далее рассматривается разбиение конуса K_0 гиперплоскостями на многогранные конусы V_i и строится разбиение этих областей на симплициальные конусы K_{ij}. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между симплициальными конусами K_{ij} и комбинаторными конфигурациями π_{ij} из некоторого семейства, и конфигурации π_{ij} приписывается вероятность $\mathbf{P}\left(\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) \in K_{ij}\right)$. Выбор подходящего разбиения позволяет изучать поведение представляющих интерес распределений на множествах комбинаторных конфигураций. Отметим, что «красивых» разбиения с интересной комбинаторикой найти достаточно сложно. Многие из них «содержатся» в разбиении евклидова пространства «зеркалами» групп отражений A_n, B_n, D_n, которые изучались во многих известных работах.

Мы планируем: 1) дальнейшее изучение описанных выше урновых моделей. В этих моделях представляет интерес изучение предельных распределений чисел шаров, как в теореме 2. Предложенный нами подход позволяет изучить поведение этих распределений при нелинейном поведении параметров, что, насколько нам известно, ранее не рассматривалось. Пока получены только условия сходимости к нормальному распределению (с использованием предельных теорем для независимых случайных величин). Планируется изучить сходимость к другим распределениям.

2) Мы планируем рассмотреть некоторые новые модели того же типа, что и описанные выше. Опишем две, на наш взгляд, наиболее интересные модели.

Первую модель для простоты обозначений опишем в трёхмерном случае. Она представляет собой однородную цепь Маркова, состояниями которой являются упорядоченные тройки (m, n, k) неотрицательных целых чисел. В нулевой момент времени цепь находится в состоянии $(0, 0, 0)$. Вероятности перехода из состояния (m, n, k) в состояния $(m+1, n, k)$, $(m, n+1, k)$, $(m, n, k+1)$ равны $\dfrac{a_m A_{mnk}^{11}}{\det A_{mnk}}, \dfrac{b_n A_{mnk}^{12}}{\det A_{mnk}}, \dfrac{c_k A_{mnk}^{13}}{\det A_{mnk}}$, где $A_{mnk} = \begin{pmatrix} a_m & b_n & c_k \\ f_m + d_m & -g_n & -p_k \\ -d_m & g_n + h_n & -q_k \end{pmatrix}$ (все буквы обозначают положительные числа), A_{mnk}^{1i} – алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении 1-й строки и i-го столбца; вероятности других переходов – нулевые. Числители и знаменатели дробей здесь являются суммами весов некоторых отображений или деревьев (матрица A_{mnk} связана с матрицей из матричной теоремы о деревьях). Вес отображения определяется как произведение весов его дуг. Вероятность перехода пропорциональна сумме весов отображений из некоторого множества. При каждом переходе изменяются веса некоторых дуг, а поэтому и отображений. Комбинаторика этого процесса нам пока до конца неясна. Основной результат, полученный к настоящему моменту, следующий.

Теорема 5. *Пусть* $\left(X_n\right)_{n=0}^{\infty}$, $\left(Y_n\right)_{n=0}^{\infty}$, $\left(Z_n\right)_{n=0}^{\infty}$ *– последовательности независимых показательно распределённых случайных величин, параметры которых образуют последовательности* $\left(a_m\right)_{m=0}^{\infty}$, $\left(b_n\right)_{n=0}^{\infty}$, $\left(c_k\right)_{k=0}^{\infty}$. *Тогда вероятность прохождения цепи через состояние* (m, n, k) *равна*

$$\frac{\det A_{mnk}}{a_m b_n c_k} density_{(0,0)} \left(\sum_{i=0}^{m} (c_i + d_i) X_i - \sum_{j=0}^{n} g_j Y_j - \sum_{l=0}^{k} p_k Z_k , -\sum_{i=0}^{m} d_i X_i + \sum_{j=0}^{n} \left(g_j + h_j\right) Y_j - \sum_{l=0}^{k} q_l Z_l \right),$$

где $density_{(0,0)}$ *обозначает плотность случайного вектора в точке* (0, 0).

Мы планируем разобраться в комбинаторике этой модели и провести изучение предельного распределения на множестве троек (m, n, k), когда $m+n+k \to \infty$. Отметим, что как частный случай здесь получается обобщённая многомерная урновая модель Маркова-Пойа, описанная выше.

Во второй модели мы рассматриваем вероятности неравенств $\mathbf{P}\left\{ \sum_{s=0}^{k_i} X_s^{(i)} - \sum_{s=0}^{k_j+1} X_s^{(j)} \le 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, d \right\}$ аналогичные рассмотренным в теореме 3, но для равномерно распределённых на отрезке [0; 1] случайных величин. Здесь получается разбиение единичного гиперкуба гиперплоскостями. Это разбиение тесно связано с комбинаторикой перестановок, которую можно описать в духе задачи Симона Ньюкомба ([10]). Подобные разбиения рассмотрены в работах ([11], [12], [13]) и некоторых других. Но именно это разбиение и соответствующая ему комбинаторика перестановок ранее не изучались. Мы планируем вычислить выписанные выше вероятности, найти производящие функции для них и исследовать асимптотическое поведение этих вероятностей. Кроме того, представляет интерес исследование распределений некоторых статистик перестановок аналогичных числу инверсий, числу возрастаний, главному индексу, связанных с этой моделью. Здесь возможно получение результатов, аналогичных [14].

3) Мы планируем изучение рассмотренного выше обобщения дискретных цепей Маркова. Здесь представляет интерес рассмотрение асимптотического поведения вероятностей из формулировки теоремы 4. Нами совместно с моим дипломником А. Е. Гуськовым было проведено изучение данной модели методом Монте-Карло ([15]). Как показал численный эксперимент, здесь возможно достаточно большое число типов поведения распределений частот состояний и дуг. В некоторых случаях наблюдается аналогия с цепями Маркова (эргодичность, нормальная распределённость времени, проведённого в состоянии), в других модель ведёт себя как урновая модель Пойа; есть случаи, когда блуждающая частица «зацикливается» в небольшом множестве состояний.

Кроме того, представляет интерес изучение условий, при которых справедливы результаты аналогичные теореме 4 и теореме Смирнова, Захарова и Сарманова. К настоящему моменту в этом направлении получено обобщение теоремы 4 (не опубликовано).

Методы, используемые в работе, включают комбинаторные тождества для характеристических функций, комбинаторику разбиений пространства гиперплоскостями, проективные преобразования, предельные теоремы для сумм независимых случайных величин и векторов. Некоторые из этих методов могут представлять самостоятельный интерес, поскольку здесь имеются аналоги для случая показательного распределения формул Варченко, Лоуренса и Бриона объёма выпуклого многогранника ([16], [12]). На этом пути получаются и новые формулы для вычисления объёмов некоторых многогранников.

3. Преподавательский опыт и педагогические планы. Работаю в Череповецком государственном университете (доцент кафедры прикладной математики) с 1999 года. В 2006-2009 г. также вёл физ.-мат класс в школе (ученики были победителями и призёрами ряда олимпиад, в том числе Московской математической олимпиады, олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, турнира городов, олимпиады «Покори Воробьёвы горы»; многие поступили в ведущие вузы России). Был и являюсь руководителем дипломных работ, в том числе по тематике, связанной с представленным проектом (в настоящее время один студент выполняет работы по теме, связанной с проектом.) Являюсь руководителем аспиранта 1-го года обучения Гуськова А. Е., с которым планирую продолжить изучение описанной выше модели, обобщающей цепи Маркова, с привлечением компьютерного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Об Урновой схеме Маркова-Пойа: от 1917 г. до наших дней. // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 3, вып. 4, 1996.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х.ф. томах. Т.1., Пер. с англ.–М.: Мир, 1984.
3. Толовиков М. И. Обобщённая многомерная урновая модель Маркова-Пойа // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 13, вып. 1, с. 144-145.
4. Толовиков М. И. *l*-возрастания в случайных перестановках. // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 12, вып. 1, с. 190.
5. Толовиков М. И. Распределение числа *l*-возрастаний в *n*-перестановке, когда *l* близко к *n*. // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 13, вып. 4, с. 224-225.

6. Толовиков М. И. Неоднородная марковская модель, в которой вероятности переходов зависят от чисел переходов по дугам. // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 14, вып. 1, с. 154-155.
7. Смирнов Н. В., Сарманов О. В., Захаров В. К. Локальная предельная теорема для чисел переходов в цепи Маркова и её применения. Докл. АН СССР, 1966, 167, №6, с. 1238-1241.
8. Толовиков М. И. Распределение числа возрастаний в перестановке при случайном прореживании // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 13, вып. 4, с. 224-225.
9. Толовиков М. И. Цепи Маркова с двумя состояниями и суммы независимых случайных величин // Вестник ЧГУ, №2, 2004.
10. Толовиков М. И. Об одной задаче, связанной с задачей Симона Ньюкомба. (принято к печати в журнале Обозрение прикладной и промышленной математики, тезисы доклада на Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике 1-8 октября 2009 года).
11. Stanley, R. P., Eulerian partitions of a unit hypercube, in: Higher Combinatorics, M. Aigner, editor, page 47. Reidel, Dordrecht/Boston, 1977.
12. T. Lam, A. Postnikov. Alcoved Polytopes I. arXiv:math/0501246v2 [math.CO]
13. F. Shmidt, R. Simion. Some geometric probability problems involving the Eulerian numbers. The electronic journal of combinatorics, 4 (no. 2) (1997).
14. Толовиков М. И. Одинаковая распределённость некоторых статистик случайных перестановок, представляющих собой линейные функции индикаторов инверсий в перестановке. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2008. – Т. 15, вып. 2, С. 370.
15. Гуськов А. Е., Толовиков М. И. Об одном классе случайных процессов, обобщающих дискретные однородные цепи Маркова (статья принята к печати в сборнике докладов конференции «Череповецкие научные чтения-2009»).
16. M. Beck, C. Haase, F. Sottile. Theorems of Brion, Lawrence, and Varchenko on rational generating functions for cones. arXiv:math/0506466v4 [math.CO]