А. Г. Хованский

Топологическая теория Галуа

Разрешимость и неразрешимость уравнений
в конечном виде

Издательство МЦНМО
Москва 2008

УДК 512.623.3+512.628.2
ББК 22.14
Х68

Хованский А. Г.

Х68 Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. — М.: Изд-во МЦНМО, 2008. — 296 с.

ISBN 978-5-94057-374-6

Книга посвящена вопросу о неразрешимости уравнений в явном виде. В ней дается полное изложение топологического варианта теории Галуа, полученного автором. В книге изложены также приложения теории Галуа к разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, элементы теории Пикара—Вессио, и результаты Лиувилля о классе функций, представимых в квадратурах.

Для студентов-математиков, аспирантов и научных сотрудников.

ББК 22.14

ISBN 978-5-94057-374-6

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. РАЗРЕШИМОСТЬ И НЕРАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

Многочисленные неудачные попытки решения ряда алгебраических и дифференциальных уравнений «в конечном» («в явном») виде привели математиков к убеждению, что явных решений для этих уравнений просто не существует. Настоящая книга посвящена вопросу о неразрешимости уравнений в конечном виде (в особенности топологическим препятствиям к такой разрешимости). Этот вопрос имеет богатую историю.

Первые доказательства неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах были найдены Абелем и Галуа. Обдумывая задачу о нахождении в явном виде неопределенного интеграла от алгебраической дифференциальной формы, Абель заложил основы теории алгебраических кривых. Лиувилль продолжил работы Абеля и доказал неэлементарность неопределенных интегралов многих алгебраических и элементарных дифференциальных форм. Неразрешимость в квадратурах ряда линейных дифференциальных уравнений тоже впервые была доказана Лиувиллем.

Еще Галуа связал вопрос о разрешимости в радикалах со свойствами некоторой конечной группы (так называемой группы Галуа алгебраического уравнения). Собственно, само понятие конечной группы было введено Галуа именно в связи с этим вопросом. Софус Ли ввел понятие непрерывной группы преобразований, пытаясь явно решать дифференциальные уравнения и приводить их к более простому виду. Пикар с каждым линейным дифференциальным уравнением связал его группу Галуа, которая является группой Ли (и, более того, является алгебраической матричной группой). Пикар и Вессио показали, что именно эта группа отвечает за разрешимость уравнений в квадратурах. Колчин развил теорию алгебраических групп, придал теории Пикара—Вессио законченный вид и обобщил ее на случай голономных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

В. И. Арнольд обнаружил, что ряд классических вопросов математики неразрешим из-за топологических причин. В частности, он показал, что алгебраическое уравнение общего вида степени 5 или выше не решается в радикалах именно по топологическим причинам. Развивая подход Арнольда, в начале семидесятых годов я построил одномерный вариант топологической теории Галуа. Согласно этой теории топология расположения римановой поверхности аналитической функции над плоскостью комплексного переменного может препятствовать представимости этой функции при помощи явных формул. На этом пути получаются наиболее сильные из известных результатов о непредставимости функций явными формулами. Недавно мне удалось обобщить эти топологические результаты на случай многих переменных.

В книге излагается топологическая теория Галуа: приводится полное и подробное изложение одномерного варианта теории и (более схематическое) изложение многомерного варианта. Топологическая теория тесно связана как с обычной (алгебраической), так и с дифференциальной теориями Галуа.

(Обычная) теория Галуа проста и идейно связана с топологической теорией. В «разрешительной» части топологической теории используется не только линейная алгебра, но и результаты теории Галуа. Теория Галуа и ее применения к разрешимости алгебраических уравнений в радикалах излагаются в книге со всеми доказательствами. Кроме задачи о разрешимости в радикалах рассматриваются и другие близкие задачи, например задача о разрешимости уравнения при помощи радикалов и вспомогательных уравнений степени, не превосходящей k.

Основные теоремы теории Пикара—Вессио формулируются без доказательств. Подчеркивается их аналогия с теорией Галуа. Обсуждается, почему теория Пикара—Вессио (по крайней мере, в принципе) отвечает на вопросы о разрешимости линейных дифференциальных уравнений в явном виде. «Разрешительная» часть топологической теории Галуа (доказывающая, например, разрешимость в квадратурах линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с разрешимой группой монодромии) использует лишь простую, линейно-алгебраическую часть теории Пикара—Вессио. Эта линейная алгебра излагается в книге. «Запретительная» часть топологической теории Галуа (доставляющая, например, результаты о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений с неразрешимой группой монодромии) изложена со всеми подробностями. Она сильнее, чем «запретительная» часть теории Пикара—Вессио.

В книге обсуждается также красивое построение Лиувилля класса элементарных функций, класса функций, представимых в квадратурах, и т. д. и его теория, оказавшая большое влияние на все дальнейшие работы в этой области.

В книге идет речь о трех вариантах теории Галуа — обычном, дифференциальном и топологическом. Эти варианты объединяет общий подход к задачам о разрешимости и неразрешимости уравнений, основанный на теории групп. Неверно, однако, что все результаты о разрешимости и неразрешимости связаны с теорией групп. Ряд ярких результатов, основанных на другом подходе, содержится в теории Лиувилля. Чтобы дать представление о теории Лиувилля, мы приводим полное доказательство его теоремы о неэлементарности некоторых неопределенных интегралов (в частности, неопределенных интегралов от ненулевых голоморфных дифференциальных форм на алгебраических кривых положительного рода).

В книге не всегда соблюдается историческая последовательность. Например, теорема Пикара—Вессио о разрешимости линейных дифференциальных уравнений в квадратурах была доказана раньше, чем основная теорема дифференциальной теории Галуа. Однако теорема Пикара—Вессио является прямым следствием этой основной теоремы, и именно так она представляется в настоящей книге.

Несколько слов о литературе. Изложение метода Лиувилля можно найти в замечательной книге Ритта [29]. Обычная теория Галуа хорошо излагается во многих местах, например в [51], [52]. Короткое и ясное изложение теории Пикара—Вессио содержится в книге Капланского [19], более современное и обстоятельное — в книге Зингера и Ван ден Пута [34]. Теория Колчина изложена в [20], [21]. Имеется также интересный обзор Зингера [32] о разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде, содержащий обширную библиографию.

О нумерации: «лемма 6.4 из главы 5» означает четвертое отдельно сформулированное утверждение в параграфе шесть пятой главы. Аналогично нумеруются остальные теоремы, утверждения, следствия и леммы (если ссылка идет внутри той же главы, то номер главы не указывается). Формулы во всей книге имеют сплошную нумерацию.

Мои первые результаты по одномерной топологической теории Галуа появились в начале 70-х годов. Тогда моим научным руководителем был В. И. Арнольд, который и заинтересовал меня этой тематикой. Я бесконечно благодарен Владимиру Игоревичу. В свое время я не опубликовал полного изложения результатов: сначала не мог разобраться в сложной истории предмета, а потом занялся совсем другой математикой. Я признателен А. А. Болибруху, который побудил меня вернуться к этой теме, и моей жене Т. В. Белокриницкой, которая помогла подготовить книгу к печати.

§ 2. Постановка задачи о разрешимости уравнений в конечном виде

Некоторые алгебраические и дифференциальные уравнения «решаются явно». Что это значит? Если решение предъявлено, оно само и дает ответ на этот вопрос. Обычно все же попытки явного решения уравнений оказываются безуспешными. Возникает желание доказать, что для тех или иных уравнений явных решений не существует. Тут уже просто необходимо точно определить, о чем идет речь (иначе непонятно, что, собственно, мы собираемся доказать). С современной точки зрения в классических работах недостает четких определений и формулировок теорем. Лиувилль, несомненно, точно понимал, что он доказывает. Он не только сформулировал задачи о разрешимости уравнений в элементарных функциях и квадратурах, но и алгебраизировал эти задачи. После его работ все эти понятия удалось определить над любым дифференциальным полем. Но требования к математической строгости во времена Лиувилля были не такие, как сейчас. Согласно Колчину (см. [20]), даже у Пикара основные определения еще недостаточно продуманы. Работы Колчина вполне современны, но его определения с самого начала даются для абстрактных дифференциальных полей.

Все же неопределенный интеграл элементарной функции или решение линейного дифференциального уравнения являются функциями, а не элементами абстрактного дифференциального поля. В функциональных пространствах кроме дифференцирования и арифметических операций есть, например, абсолютно неалгебраическая операция суперпозиции. Вообще, в функциональных пространствах больше средств для написания «явных формул», чем в абстрактных дифференциальных полях. Кроме этого, приходится учитывать, что функции бывают многозначными, имеют особенности и т. д.

Формализовать задачу о неразрешимости уравнений в явном виде в функциональных пространствах несложно (в книге мы будем интересоваться именно этой задачей). Сделать это можно так: можно выделить тот или иной класс функций и сказать, что уравнение решается явно, если его решение принадлежит этому классу. Разные классы функций соответствуют разным понятиям разрешимости.

2.1. Задание класса функций с помощью списков основных функций и допустимых операций. Класс функций можно выделить, задав список *основных функций* и список *допустимых операций*. После этого класс функций определяется как множество всех функций, которые получаются из основных функций при помощи применения допустимых операций. В п. 2.2 именно таким способом определяются лиувиллевские классы функций.

Лиувиллевские классы функций, фигурирующие в задачах о разрешимости в конечном виде, содержат многозначные функции. В связи с этим исходные понятия нужно уточнить. В этом пункте принимается «глобальный» вариант работы с многозначными функциями, приводящий к расширенному пониманию определения класса функций, заданного списками основных функций и допустимых операций. В глобальном варианте многозначная функция рассматривается как единый объект. Определяются *операции над многозначными функциями*. Результатом применения этих операций является некоторое множество многозначных функций, про каждую из которых говорится, что она получена применением заданной операции к заданным функциям. *Класс функций* определяется как множество всех (многозначных) функций, которые получаются из основных функций при помощи допустимых операций.

Определим, например, что такое сумма двух многозначных функций одной переменной.

Определение. Возьмем произвольную точку a на комплексной прямой, один из ростков f_a аналитической функции f в точке a и один из ростков g_a аналитической функции g в той же точке a. Будем говорить, что многозначная функция φ, порожденная ростком $\varphi_a = f_a + g_a$, *представима в виде суммы* функций f и g.

Например, легко видеть, что ровно две функции представляются в виде $\sqrt{x}+\sqrt{x}$: это $f_1=2\sqrt{x}$ и $f_2\equiv 0$. Абсолютно аналогично определяются и другие операции над многозначными функциями. *Замкнутость какого-либо класса многозначных функций относительно сложения означает, что этот класс вместе с любыми двумя функциями содержит все функции, представимые в виде их суммы.* То же самое нужно сказать и про все другие операции над многозначными функциями, понимаемые в указанном выше смысле.

В приведенном выше определении важную роль играет не только сама операция сложения, но и операция аналитического продолжения, спрятанная в понятии многозначной функции. Действительно, рассмотрим следующий пример. Пусть f_1 — аналитическая функция, определенная в области U комплексной прямой $\mathbb{C}^1$, не продолжающаяся аналитически за пределы области U, и пусть f_2 — аналитическая функция в области U, определенная равенством $f_2=-f_1$. Согласно данному определению функция, тождественно равная нулю, представима в виде f_1+f_2 *на всей комплексной прямой*. Согласно общепринятой точке зрения равенство $f_1+f_2=0$ справедливо только в области U, но не вне ее.

В глобальном варианте работы с многозначными функциями мы не настаиваем на существовании *единой области*, в которой все нужные действия производились бы над однозначными ветвями многозначных функций. Одна операция может производиться в одной области, а другая операция — в другой области над аналитическими продолжениями полученных функций. В сущности, это расширенное понимание операций эквивалентно добавлению операции аналитического продолжения к числу допустимых операций над аналитическими ростками. Для функции одной переменной удается получить топологические ограничения даже и при таком, расширенном, понимании операций над многозначными аналитическими функциями.

Ниже при рассмотрении топологических препятствий к принадлежности функции одной переменной тому или иному классу мы будем иметь в виду глобальный вариант определения класса функций с помощью списков основных функций и допустимых операций.

Для функций многих переменных в столь расширенной формулировке это сделать не удается, и приходится принять более ограничительную формулировку (см. п. 1.1 главы 7), связанную с ростками функций, которая, впрочем, не менее (а может быть, даже более) естественна. Единственное место в книге, где мы используем эту более ограничительную формулировку, — глава 7, в которой идет речь о функциях многих переменных.

2.2. Лиувиллевские классы функций одной переменной. В этом пункте определяются лиувиллевские классы функций одной переменной (для многих переменных определения приведены в § 1 главы 7). Мы будем задавать эти классы при помощи списков основных функций и допустимых операций.

Функции одной переменной, представимые в радикалах.

Список основных функций: все комплексные константы, независимая переменная x.

Список допустимых операций: арифметические операции и операции извлечения корня $\sqrt[n]{f}$ степени n, $n = 2, 3, \ldots$, из заданной функции f.

Функция $g(x) = \sqrt[3]{5x + 2\sqrt[2]{x}} + \sqrt[7]{x^3 + 3}$ доставляет пример функции, представимой в радикалах.

С этим классом связана знаменитая задача о разрешимости уравнений в радикалах. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \ldots + r_n = 0,$$

в котором r_i — рациональные функции одной переменной. Полный ответ на вопрос о разрешимости таких уравнения в радикалах дает теория Галуа (см. главу 2).

Для определения остальных классов нам понадобится список *основных элементарных функций*. В этот список, в сущности, входят те функции, которые мы проходили в школе и которые часто вносят в клавиатуры калькуляторов.

Список основных элементарных функций:

1. Все комплексные константы и независимая переменная x.

2. Экспонента, логарифм и степенная функция x^α, где α — любая комплексная константа.

3. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс.

4. Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Перейдем теперь к списку *классических операций* над функциями. Здесь приводится начало списка. Он будет продолжен в § 1 главы 1.

Список классических операций:

1. *Операция суперпозиции*, сопоставляющая функциям f, g функцию $f \circ g$.

2. *Арифметические операции*, сопоставляющие функциям f и g функции $f+g$, $f-g$, fg и f/g.

3. *Операция дифференцирования*, сопоставляющая функции f функцию f'.

4. *Операция интегрирования*, сопоставляющая функции f ее неопределенный интеграл y (т. е. любую функцию y, такую что $y' = f$; по функции f функция y определена с точностью до аддитивной постоянной).

5. *Операция решения алгебраического уравнения*, сопоставляющая функциям $f_1, \ldots, f_n$ функцию y, такую что $y^n + f_1 y^{n-1} + \ldots + f_n = 0$ (по функциям $f_1, \ldots, f_n$ функция y определена не вполне однозначно, так как алгебраическое уравнение степени n может иметь n решений).

Вернемся теперь к определению лиувиллевских классов функций одной переменной.

Элементарные функции одной переменной.

Список основных функций: основные элементарные функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирование.

Элементарные функции записываются формулами, например следующей:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\exp(\sin x) + \cos x).$$

Функции одной переменной, представимые в квадратурах.

Список основных функций: основные элементарные функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирование, интегрирование.

Например, эллиптический интеграл

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где P — кубический полином, представим в квадратурах. Но, как доказал Лиувилль, если полином P не имеет кратных корней, то функция f не является элементарной.

Обобщенные элементарные функции одной переменной. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс элементарных функций. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Функции одной переменной, представимые в обобщенных квадратурах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Определим еще два класса функций, близких к лиувиллевским классам.

Функции одной переменной, представимые в *k*-радикалах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в радикалах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Функции одной переменной, представимые в *k*-квадратурах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Глава 1

ПОСТРОЕНИЕ ЛИУВИЛЛЕВСКИХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ И ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Первые доказательства неразрешимости некоторых уравнений в квадратурах и в элементарных функциях были получены в первой половине девятнадцатого века Ж. Лиувиллем (см. [25]–[27], [29]). Позднее П. Л. Чебышёв, Д. Д. Мордухай-Болтовский, А. Островский, Дж. Ритт, Дж. Давенпорт, М. Розенлихт, М. Зингер и многие другие развили результаты Лиувилля. Библиографию по этому вопросу можно найти в [32].

Согласно теории Лиувилля «достаточно простые» уравнения либо имеют «достаточно простые» решения, либо вообще не решаются в явном виде. В некоторых случаях результаты доведены до алгоритмов, которые либо позволяют доказать неразрешимость уравнения в конечном виде, либо предъявляют его явное решение.

Теория Лиувилля даёт ответ, например, на следующие вопросы:

1) при каких условиях неопределенный интеграл от элементарной функции является элементарной функцией?

2) при каких условиях представимы в обобщенных квадратурах все решения линейного дифференциального уравнения, коэффициенты которого — рациональные функции?

Чтобы продемонстрировать метод Лиувилля, мы приводим доказательство его теоремы об интегралах (см. § 3) и рассматриваем несколько применений этой теоремы. Пусть $\alpha = R(z, u)\, dz$ — 1-форма, в которой R — рациональная функция двух переменных, z — комплексная переменная и u — функция от z. В § 4 рассмотрен случай, когда u — логарифм рациональной функции f переменной z, $u = \ln f(z)$. Приведена процедура, позволяющая либо найти неопределенный интеграл формы α, либо доказать, что он не является обобщенной элементарной функцией. В § 5 описан аналогичный результат в случае, когда u — экспонента рациональной функции f переменной z, $u = \exp f(z)$. Случай абелевой 1-формы α, в котором u — алгебраическая функция переменной z, рассмотрен в § 6. Описаны необходимые и достаточные условия элементарности абелева интеграла. Выполнимость этих условий трудно проверить.

В этом смысле алгебраический случай сложнее, чем логарифмический и экспоненциальный. Параграфы 3–6 можно пропустить без ущерба для понимания остального материала книги. Чтобы избежать ссылок на эти параграфы, в третьей главе мы повторяем простые и короткие вычисления, связанные с присоединением к дифференциальному полю интеграла, экспоненты интеграла и корня алгебраического уравнения.

В § 1 приводятся принадлежащие Лиувиллю значительно более простые определения лиувиллевских классов функций (например, класса элементарных функций). Объясняется, как именно удалось Лиувиллю алгебраизировать вопросы о разрешимости уравнений в элементарных функциях и в других лиувиллевских классах функций. В § 2 приводится конструкция расширений Лиувилля функциональных дифференциальных полей.

В § 7 мы формулируем некоторые результаты теории Лиувилля, относящиеся к вопросу разрешимости линейных дифференциальных уравнений. Более полно на этот вопрос отвечает дифференциальная теория Галуа (см. главу 3).

§ 1. Новые определения лиувиллевских классов функций

Лиувилль алгебраизировал задачу о разрешимости в элементарных функциях и квадратурах. Главным препятствием на этом пути является абсолютно неалгебраическая операция суперпозиции. Лиувилль обошел это препятствие следующим образом: с каждой функцией g из списка основных функций он связал операцию суперпозиции с этой функцией, переводящую функцию f, к которой применяется эта операция, в функцию $g \circ f$. Лиувилль заметил, что все основные элементарные функции сводятся к логарифму и к экспоненте (см. лемму 1.1 ниже). Суперпозиции $y = \exp f$ и $z = \ln f$ можно рассматривать как решения уравнений $y' = f'y$ и $z' = f'/f$. Таким образом, внутри лиувиллевских классов функций вместо абсолютно неалгебраической операции суперпозиции достаточно рассматривать операции решения простых дифференциальных уравнений. После этого задача о разрешимости в лиувиллевских классах функций становится дифференциально-алгебраической и переносится на абстрактные дифференциальные поля.

Приступим к реализации этой программы.

Продолжим список классических операций (начало списка в п. 2.2 введения):

6. *Операция взятия экспоненты*, сопоставляющая функции f функцию $\exp f$.

7. *Операция взятия логарифма*, сопоставляющая функции f функцию $\ln f$.

Приведем теперь новые определения трансцендентных лиувиллевских классов функций.

Элементарные функции одной переменной.

Список основных функций: все комплексные константы и независимая переменная x.

Список допустимых операций: взятие экспоненты, взятие логарифма, арифметические операции, дифференцирование.

Функции одной переменной, представимые в квадратурах.

Список основных функций: все комплексные константы.

Список допустимых операций: взятие экспоненты, арифметические операции, дифференцирование, интегрирование.

Обобщенные элементарные функции одной переменной и функции одной переменной, представимые в обобщенных квадратурах и *k*-квадратурах, определяются так же, как соответствующие необобщенные классы функций, нужно лишь к списку допустимых операций добавить, соответственно, операцию решения алгебраических уравнений или операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Лемма 1.1. *Основные элементарные функции выражаются с помощью комплексных констант, арифметических операций и суперпозиций через экспоненту и логарифм.*

Доказательство. Для степенной функции x^α нужное выражение доставляет равенство $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Для тригонометрических функций нужные выражения вытекают из формулы Эйлера $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$. При вещественных значениях x имеем $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ и $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. В силу аналитичности эти же формулы справедливы и для комплексных значений x. Функции тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Покажем, что для вещественных значений x справедливо равенство $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln z$, где $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Очевидно, что $|z| = 1$,

$\arg z = 2\arg(1+ix)$, $\operatorname{tg}(\arg(1+ix)) = x$, что и доказывает нужное равенство. В силу аналитичности это же равенство справедливо и для комплексных значений x. Остальные обратные тригонометрические функции выражаются через арктангенс. Именно, $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Квадратный корень, участвующий в выражении функции arcsin, выражается через экспоненту и логарифм: $x^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)$. Лемма доказана. □

Теорема 1.2. *Для каждого из трансцендентных лиувиллевских классов функций новое и старое определения* (см. настоящий параграф и п. 2.2 введения) *эквивалентны.*

Доказательство. В одну сторону теорема очевидна: ясно, что любая функция, принадлежащая некоторому лиувиллевскому классу, понимаемому в смысле нового определения, принадлежит тому же классу, понимаемому в смысле старого определения.

Докажем теорему в другую сторону. Согласно лемме 1.1 основные элементарные функции лежат в классах элементарных и обобщенных элементарных функций, понимаемых в смысле нового определения. Из этой же леммы вытекает, что классы функций, представимых в квадратурах, обобщенных квадратурах и k-квадратурах, понимаемые в смысле нового определения, тоже содержат основные элементарные функции. Действительно, независимая переменная x принадлежит этим классам, так как она получается интегрированием константы 1, ибо $x' = 1$. Вместо операции взятия логарифма, которой нет среди допустимых операций в этих классах, можно использовать операцию интегрирования, так как $(\ln f)' = f'/f$.

Нам осталось показать, что лиувиллевские классы функций, понимаемые в смысле нового определения, замкнуты относительно суперпозиций. Дело здесь в следующем: операция взятия суперпозиции коммутирует со всеми операциями, фигурирующими в новых определениях классов функций, за исключением операций дифференцирования и интегрирования. Так, например, результат применения операции exp к суперпозиции $g \circ f$ совпадает с результатом применения операции взятия суперпозиции к функциям $\exp g$ и f, т. е. $\exp(g \circ f) = (\exp g) \circ f$. Аналогично $\ln(g \circ f) = (\ln g) \circ f$, $(g_1 \pm g_2) \circ f = (g_1 \circ f) \pm (g_2 \circ f)$, $(g_1 g_2) \circ f = (g_1 \circ f)(g_2 \circ f)$, $(g_1/g_2) \circ f = (g_1 \circ f)/(g_2 \circ f)$. Если функция y удовлетворяет уравнению $y^n +$

$+g_1y^{n-1}+\ldots+g_n=0$, то функция $(y\circ f)$ удовлетворяет уравнению $(y\circ f)^n+(g_1\circ f)(y\circ f)^{n-1}+\ldots+(g_n\circ f)=0$.

Для операций дифференцирования и интегрирования имеем следующие простые коммутационные соотношения с операцией суперпозиции: $(g)'\circ f=(g\circ f)'(f')^{-1}$ (если функция f — константа, то функция $(g)'\circ f$ тоже константа), и если y — неопределенный интеграл функции g, то $y\circ f$ — неопределенный интеграл функции $(g\circ f)f'$ (другими словами, интегрированию функции g при суперпозиции с функцией f соответствует интегрирование функции $g\circ f$, домноженной на функцию f').

Отсюда и вытекает замкнутость лиувиллевских классов, понимаемых в смысле нового определения, относительно суперпозиций. Действительно, если функция g получается из констант (или из констант и независимой переменной) при помощи операций, которые мы обсуждали выше, то функция $g\circ f$ получается применением тех же или почти тех же операций, как в случае интегрирования и дифференцирования, из функции f. Теорема доказана. □

Замечание. Легко видеть, что операцию дифференцирования тоже можно исключить из списков допустимых операций лиувиллевских классов функций. Для доказательства достаточно воспользоваться явным вычислением производных экспоненты и логарифма и правилами дифференцирования формул, включающих суперпозиции и арифметические операции. Исключение операции дифференцирования не помогает в задаче о разрешимости уравнений в конечном виде (иногда исключение дифференцирования дает возможность более инвариантно сформулировать результат, см. вторую формулировку теоремы Лиувилля об абелевых интегралах из § 6).

§ 2. Расширения Лиувилля абстрактных и функциональных дифференциальных полей

Поле K называется *дифференциальным полем*, если задано аддитивное отображение $a\to a'$, удовлетворяющее соотношению Лейбница $(ab)'=a'b+ab'$. Элемент y дифференциального поля K называется *константой*, если $y'=0$. Все константы дифференциального поля образуют подполе, которое называется *полем констант*. Во всех интересующих нас случаях полем констант является поле комплексных чисел. *Мы всегда в дальнейшем предполагаем, что дифференциальное поле имеет нулевую характеристику и алгебраически замкнутое поле констант*. Элемент y дифференциального поля называется *экспонентой* элемента a, если $y' = a'y$; *экспонентой интеграла* элемента a, если $y' = ay$; *логарифмом* элемента a, если $y' = a'/a$; *интегралом* элемента a, если $y' = a$.

Пусть дифференциальное поле K и множество M лежат в некотором дифференциальном поле F. *Присоединением* к дифференциальному полю K множества M называется минимальное дифференциальное поле $K\langle M\rangle$, содержащее поле K и множество M.

Дифференциальное поле F, содержащее дифференциальное поле K и имеющее то же поле констант, называется *элементарным расширением* поля K, если существует такая цепочка дифференциальных полей $K = F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n = F$, что при каждом $i = 1, \ldots, n-1$ поле $F_{i+1} = F_i\langle x_i\rangle$ получается присоединением к полю F_i элемента x_i, причем x_i — экспонента или логарифм некоторого элемента a_i поля F_i. Элемент $a \in F$ называется *элементарным* над K, $K \subset F$, если он содержится в каком-либо элементарном расширении поля K.

Обобщенное элементарное расширение, расширение Лиувилля, обобщенное расширение Лиувилля и *k-расширение Лиувилля* поля K определяются аналогично. При построении обобщенных элементарных расширений допускаются присоединения экспонент, логарифмов и алгебраические расширения. При построении расширений Лиувилля допускаются присоединения интегралов и экспонент интегралов. В обобщенных расширениях Лиувилля и k-расширениях Лиувилля кроме этого допускаются, соответственно, алгебраические расширения и присоединения решений алгебраических уравнений степени не выше k. Элемент $a \in F$ называется *обобщенно-элементарным* над K, $K \subset F$ (*представимым в квадратурах, в обобщенных квадратурах, в k-квадратурах* над K), если a содержится в каком-либо обобщенном элементарном расширении (расширении Лиувилля, обобщенном расширении Лиувилля, k-расширении Лиувилля) поля K.

Замечание. Уравнение для экспоненты интеграла проще, чем уравнение для экспоненты. Поэтому при определении расширений Лиувилля и т. д. используются присоединения экспонент интегралов. Вместо этого можно было бы отдельно присоединять экспоненты и отдельно интегралы.

Перейдем к функциональным дифференциальным полям. Именно с такими полями мы будем иметь дело в книге (хотя некоторые результаты без труда переносятся на абстрактные дифференциальные поля).

Всякое подполе K поля всех мероморфных функций в связной области U на сфере Римана, содержащее все комплексные константы и замкнутое относительно дифференцирования (т. е. если $f \in K$, то $f' \in K$), доставляет пример функционального дифференциального поля. Дадим теперь общее определение. Пусть V, v — пара, состоящая из связной римановой поверхности V и мероморфного векторного поля v на ней. Производная Ли L_v вдоль векторного поля v действует на поле F всех мероморфных функций на поверхности V и задает дифференцирование $f' = L_v f$ в этом поле. *Функциональное дифференциальное поле* — это любое дифференциальное подполе поля F, содержащее все комплексные константы.

Иногда удобнее использовать другое определение дифференцирования поля функций, в котором вместо мероморфного векторного поля фигурирует мероморфная 1-форма α. Производную f' функции f можно определить следующей формулой: $f' = df/\alpha$ (частное двух мероморфных 1-форм является корректно определенной мероморфной функцией). Описанное дифференцирование — это производная Ли L_v вдоль векторного поля v, связанного с формой α следующим соотношением: значение формы α на поле v тождественно равно единице.

Для *расширения функциональных полей* полезна следующая конструкция. Пусть K — некоторое подполе поля мероморфных функций на связной римановой поверхности V, снабженной мероморфной формой α, инвариантное относительно дифференцирования $f' = df/\alpha$ (т. е. если $f \in K$, то $f' \in K$). Рассмотрим любую связную риманову поверхность W вместе с аналитическим отображением $\pi\colon W \to V$. Фиксируем на W форму $\beta = \pi^*\alpha$. Дифференциальное поле F всех мероморфных функций на W с дифференцированием $\varphi' = d\varphi/\beta$ содержит дифференциальное подполе π^*K, состоящее из функций вида π^*f, где $f \in K$. Дифференциальное поле π^*K изоморфно дифференциальному полю K, и оно лежит внутри дифференциального поля F. Если удачно подобрать поверхность W, то расширение поля π^*K, изоморфного полю K, можно произвести внутри поля F.

Пусть требуется расширить поле K, скажем, интегралом y некоторой функции $f \in K$. Это можно сделать следующим образом. Над римановой поверхностью V можно рассмотреть риманову поверхность W неопределенного интеграла y формы $f\alpha$. По самому определению римановой поверхности W существует естественная проекция $\pi\colon W \to V$, и функция y является однозначной мероморфной функцией на поверхности W. Дифференциальное поле F мероморфных функций на W с операцией дифференцирования $f' = df/\pi^*\alpha$ содержит как элемент y, так и поле π^*K, изоморфное полю K. Поэтому расширение $\pi^*K\langle y\rangle$ определено и является подполем дифференциального поля F. Именно эту конструкцию расширения мы имеем в виду, когда говорим о расширениях функциональных дифференциальных полей. Эта же конструкция позволяет присоединить к функциональному дифференциальному полю K логарифм, экспоненту, интеграл или экспоненту интеграла от любой функции f из поля K. Для любых функций $f_1, \ldots, f_n \in K$ можно таким способом присоединить к K решение y алгебраического уравнения $y^n + f_1 y^{n-1} + \ldots + f_n = 0$ или все решения $y_1, \ldots, y_n$ этого уравнения (присоединение всех решений $y_1, \ldots, y_n$ можно осуществить на римановой поверхности вектор-функции $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$). Таким же способом для любых функций $f_1, \ldots, f_{n+1} \in K$ можно присоединить к K n-мерное аффинное пространство над $\mathbb{C}$ всех решений линейного дифференциального уравнения $y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \ldots + f_n y + f_{n+1} = 0$. (Напомним, что росток любого решения линейного дифференциального уравнения аналитически продолжается вдоль кривой на поверхности V, не проходящей через полюсы функций $f_1, \ldots, f_{n+1}$.)

Итак, *все упомянутые выше расширения функциональных дифференциальных полей можно осуществить, не выходя из класса функциональных дифференциальных полей*. Говоря о расширениях функциональных дифференциальных полей, мы всегда имеем в виду именно эту процедуру.

Дифференциальное поле, состоящее из всех комплексных констант, и дифференциальное поле, состоящее из всех рациональных функций от одной переменной, можно рассматривать как дифференциальные поля функций, определенных на сфере Римана.

Сформулируем снова теорему 1.2, используя определения из абстрактной дифференциальной алгебры и конструкцию расширения функциональных дифференциальных полей.

Теорема 2.1. *Функция одной комплексной переменной (возможно, многозначная) принадлежит*

1) *классу элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому элементарному расширению поля всех рациональных функций одной переменной;*

2) *классу обобщенных элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому обобщенному элементарному расширению поля рациональных функций;*

3) *классу функций, представимых в квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому расширению Лиувилля поля всех комплексных констант;*

4) *классу функций, представимых в k-квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому k-расширению Лиувилля поля всех комплексных констант;*

5) *классу функций, представимых в обобщенных квадратурах, если и только если она принадлежит обобщенному расширению Лиувилля поля всех комплексных констант.*

§ 3. Интегрирование элементарных функций

Элементарные функции дифференцировать легко, но интегрировать их трудно. Как доказал Лиувилль, неопределенный интеграл от элементарной функции обычно не является элементарной функцией.

Теорема 3.1 (Лиувилля об интегралах). *Неопределенный интеграл y функции f, лежащей в функциональном дифференциальном поле K, принадлежит некоторому обобщенному элементарному расширению этого поля, если и только если этот интеграл представим в виде*

$$y(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt = A_0(z) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln A_i(z), \tag{1}$$

где A_i при $i = 0, \ldots, n$ — некоторые функции из поля K.

Следствие 3.2. *Неопределенный интеграл y от обобщенной элементарной функции f является обобщенной элементарной функцией, если и только если он представим в виде*

$$y(z) = A_0(z) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln A_i(z),$$

где A_i при $i=0, \dots, n$ — рациональные функции с комплексными коэффициентами от функции f и ее производных.

Априори интеграл от элементарной функции f мог бы быть очень сложной элементарной функцией. Теорема Лиувилля показывает, что ничего такого случиться не может. Или интеграл от элементарной функции неэлементарен, или он имеет описанный в следствии простой вид.

Теорема Лиувилля — яркий результат о разрешимости и о неразрешимости уравнений в явном виде, не связанный с теорией групп. В § 3 мы приведем полное доказательство этой теоремы.

Условие (1) из теоремы Лиувилля в дифференциальной форме означает, что элемент $f \in K$ представим в виде

$$f = A_0' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}, \tag{2}$$

где A_i при $i=0, \dots, n$ — некоторые элементы поля K. В абстрактной дифференциальной алгебре справедлив аналог теоремы Лиувилля. В формулировке абстрактной теоремы в качестве K нужно взять абстрактное дифференциальное поле и воспользоваться условием (1) в дифференциальной форме (2).

Рассуждения Лиувилля (см. [29]) были значительно упрощены в работах [30], [31] (см. также [28]). Доказательство с небольшими изменениями проходит для абстрактных дифференциальных полей. Правда, так как абстрактные дифференциальные поля для нас неинтересны, мы не обсуждаем существование нужных нам по ходу дела расширений полей (скажем, существование дифференциального поля, содержащего интеграл некоторого элемента заданного дифференциального поля). Для функциональных дифференциальных полей вопросы такого рода очевидны и уже рассмотрены выше (см. § 2).

Для многих элементарных дифференциальных форм теорема Лиувилля позволят либо найти интеграл, либо доказать, что интеграл не является обобщенной элементарной функцией. Рассмотрим, например, форму $\alpha = R(z, u)\, dz$, где R — рациональная функция двух переменных, а u — функция переменной z. Вопрос об элементарности интеграла формы α в случае, когда $u = \ln f$, где f — рациональная функция переменной z, разобран в § 4. Случай, когда $u = \exp f$, где f — рациональная функция переменной z, разобран в § 5.

Берется ли интеграл от алгебраической функции в явном виде? Пионерские работы Абеля, заложившие основы теории алгебраических кривых и абелевых интегралов, были посвящены этому вопросу для специального класса алгебраических функций. Использование теории алгебраических кривых и топологии позволяет довольно полно объяснить причины неэлементарности абелевых интегралов (см. § 6). Правда, проверка выполнения необходимых и достаточных условий элементарности абелевых интегралов из § 6 сама является непростой задачей (ср. [17]), которую в этой книге мы не рассматриваем.

Скажем несколько слов о терминологии. Начиная с четвертого пункта в § 3 до конца § 5 термин «рациональная» функция используется в различных смыслах. Чтобы избежать недоразумений, сделаем необходимые пояснения. Мы будем иметь дело с полем F, порожденным над полем K одним элементом t, трансцендентным над полем K. Поле F естественно отождествляется с полем $K\langle x\rangle$ рациональных функций над полем K: каждый элемент $g\in F$ является значением единственной рациональной функции $G\in K\langle x\rangle$ на элементе t. Мы будем отождествлять элемент $g\in F$ как с функцией G, так и с ее значением $G(t)$ на элементе t. Мы будем говорить об элементах поля F как о рациональных функциях, будем раскладывать эти функции в правильные дроби и т. д. Операция дифференцирования на поле F индуцирует операцию дифференцирования $G\to DG$ на рациональных функциях. Операция D зависит от уравнения, которому удовлетворяет элемент t: она имеет вид $DG=(a'/a)G'$, если t — логарифм элемента $a\in K$, и вид $DG(t)=a'tG'(t)$, если t — экспонента элемента $a\in K$. В § 4 и 5 встречается также поле K рациональных функций комплексной переменной. Чтобы избежать недоразумений, говоря об элементах этого поля, мы будем подчеркивать, что это рациональные функции *комплексной переменной* z, и будем обозначать это поле K символом $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

3.1. План доказательства теоремы Лиувилля. Нам надо доказать, что *если производная обобщенной элементарной функции y над полем K лежит в поле K, т. е. если $y'\in K$, то функция y представима в виде* (1). Введем для обобщенных элементарных функций над функциональным дифференциальным полем K понятие сложности. Скажем, что функция y является *обобщенной элементарной функци-*

ей сложности не выше k над K, если существует последовательность $K=F_0\subset F_1\subset\ldots\subset F_k$ функциональных дифференциальных полей F_i, в которой при $i=1,\ldots,k$ поле F_i является расширением поля F_{i-1} при помощи добавления экспоненты, логарифма или алгебраической функции над полем F_{i-1}.

Теорема 3.1 доказывается по индукции. Индукционное утверждение $I(m)$: *теорема Лиувилля верна для любого обобщенно-элементарного интеграла y сложности не выше m над любым функциональным дифференциальным полем K*. Утверждение $I(0)$ очевидно: если интеграл y лежит в поле K, то он представим в виде (1): $y=A_0$, где $A_0\in K$.

Пусть y — обобщенно-элементарный интеграл над K сложности не выше k, т. е. $y'\in K$, $y\in F_k$ и $K=F_0\subset F_1\subset\ldots\subset F_k$ — последовательность полей, в которой каждое поле F_i получается из предыдущего поля F_{i-1} при помощи добавления экспоненты, логарифма или алгебраической функции над полем F_{i-1}. Так как $y'\in F_1$, то по индукционному утверждению $I(k-1)$ можно считать, что

$$y=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\ln R_i+R_0, \tag{3}$$

где $R_1,\ldots,R_q,R_0\in F_1$.

Поле F_1 получено из поля K присоединением или алгебраического элемента, или логарифма, или экспоненты над полем K. Эти три случая ниже рассматриваются отдельно (см. п. 3.6). Мы покажем, что если F_1 — алгебраическое расширение поля K, то элемент y представляется через элементы поля K формулой, аналогичной (3) и содержащей то же число q логарифмических слагаемых. Если F_1 получено из K при помощи логарифмического расширения, то функция R_0 могла бы содержать аддитивный логарифмический член, однако функции $R_1,\ldots,R_q$ логарифма содержать не могут. Поэтому представление y через элементы поля K имеет вид, аналогичный (3), но может содержать $q+1$ логарифмическое слагаемое. Если же поле F_1 получено из K при помощи экспоненциального расширения, то экспонента не может входить в функцию R_0 и могла бы входить в функции R_i при $i>0$ только в качестве сомножителя. Поэтому после логарифмирования экспонента пропадает и соответствующие сомножители становятся слагаемыми, которые прибавляются к R_0.

Мы приступим к реализации этого индукционного доказательства в п. 3.6. До этого мы уточним формулировку теоремы Лиувилля (п. 3.2) и обсудим общие свойства расширений дифференциального поля степеней трансцендентности нуль (п. 3.3) и один (п. 3.4), среди которых выделяются присоединения интеграла и экспоненты интеграла (п. 3.5).

3.2. Уточнение теоремы Лиувилля. Докажем, что *в формулировке теоремы Лиувилля можно добавить требование линейной независимости коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ над полем рациональных чисел* (см. «торическую» лемму 3.4 ниже). Начнем с очевидной леммы 3.3.

Лемма 3.3. *Если $g = f_1^{k_1} \ldots f_n^{k_n}$, где k_i — целые числа и $f_1, \ldots, f_n$ — ненулевые элементы некоторого дифференциального поля, то* $\frac{g'}{g} = \sum k_i \frac{f_i'}{f_i}$.

Доказательство вытекает из тождества Лейбница (или из равенства логарифма произведения сумме логарифмов сомножителей). □

Рассмотрим набор $A_1, \ldots, A_n$ ненулевых элементов дифференциального поля K и линейную комбинацию $S = \lambda_1 \frac{A_1'}{A_1} + \ldots + \lambda_n \frac{A_n'}{A_n}$ их логарифмических производных с постоянными коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Лемма 3.4. *Если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ зависимы над полем $\mathbb{Q}$, то в мультипликативной группе G, порожденной элементами $A_1, \ldots, A_n$, можно выбрать меньше чем n элементов, некоторая линейная комбинация с постоянными коэффициентами логарифмических производных которых равна S.*

Доказательство. Можно считать, что ни один из элементов A_i не равен константе: в противном случае $\frac{A_i'}{A_i} = 0$ и число слагаемых в S можно сократить. Можно считать, что группа G свободна и не содержит констант, отличных от единицы. Действительно, нетривиальное тождество $A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n} = c$, где c — константа, по лемме 3.3 влечет за собой нетривиальное линейное соотношение $\sum k_i \frac{A_i'}{A_i} = 0$, которое позволяет сократить число слагаемых в S. Если группа G свободна, то в ней можно выбрать такие новые образующие $B_1, \ldots, B_n$, что $A_1 = B_1^{m_{1,1}} \ldots B_n^{m_{1,n}}$, $\ldots$, $A_n = B_1^{m_{n,1}} \ldots B_n^{m_{n,n}}$, где $M = \{m_{i,j}\}$ —

произвольная целочисленная $(n\times n)$-матрица с определителем 1. По лемме 3.3 имеем $\frac{A_i'}{A_i}=m_{i,1}\frac{B_1'}{B_1}+\ldots+m_{i,n}\frac{B_n'}{B_n}$. Поэтому S является линейной комбинацией логарифмических производных элементов B_i. Логарифмическая производная функции B_1 входит в эту комбинацию с коэффициентом $\lambda_1 m_{1,1}+\ldots+\lambda_n m_{n,1}$. Пусть $p_1\lambda_1+\ldots+p_n\lambda_n=0$ — соотношение между коэффициентами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, где $p_1,\ldots,p_n$ — целые числа, не имеющие общего делителя. Выберем целочисленную матрицу M с единичным определителем так, чтобы выполнялись равенства $m_{1,1}=p_1$, …, $m_{n,1}=p_n$. Это можно сделать, так как несократимый целочисленный вектор $p=(p_1,\ldots,p_n)$ можно дополнить до базиса решетки $\mathbb{Z}^n$. Такому выбору матрицы соответствует некоторый набор образующих $B_1,\ldots,B_n$. Элемент S является линейной комбинацией логарифмических производных элементов $B_2,\ldots,B_n$. Лемма доказана. □

Мы показали, что из теоремы Лиувилля вытекает ее уточнение, сформулированное в начале этого пункта.

3.3. Алгебраические расширения дифференциальных полей. Пусть $K\subset F$ — функциональные дифференциальные поля и $P\in K[x]$ — неприводимый полином степени n над полем K. Пусть поле F содержит все n корней $x_1,\ldots,x_n$ полинома P. При $i=1,\ldots,n$ обозначим через K_i поле, полученное алгебраическим присоединением к полю K корня x_i. Поля K_i изоморфны друг другу: для каждого $i=1,\ldots,n$ поле K_i изоморфно фактору $K[x]/(P)$ кольца полиномов $K[x]$ по идеалу (P), порожденному полиномом P.

Лемма 3.5. *Для каждого $i=1,\ldots,n$ поле K_i замкнуто относительно дифференцирования. Для каждой пары индексов $1\leqslant i,j\leqslant n$ отображение, оставляющее поле K неподвижным и переводящее элемент x_i в x_j, продолжается до дифференциального изоморфизма полей K_i и K_j.*

Доказательство. Для полинома $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ над полем K обозначим через $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial t}$ соответственно полиномы $nx^{n-1}+\ldots+a_{n-1}$ и $a_1'x^{n-1}+\ldots+a_n'$. Так как полином P неприводим над K, то полином $\frac{\partial P}{\partial x}$ не имеет общих корней с полиномом P и не равен нулю в поле $K[x]/(P)$. Обозначим через M полином степени меньше n, для которого выполняется сравнение $M\frac{\partial P}{\partial x}\equiv-\frac{\partial P}{\partial t} \mod P$.

Для каждого корня x_i, продифференцировав в поле F тождество $P(x_i)=0$, получаем равенство $\frac{\partial P}{\partial x}(x_i)x_i'+\frac{\partial P}{\partial t}(x_i)=0$, откуда следует, что $x_i'=M(x_i)$. Итак, производная элемента x_i является значением в точке x_i полинома M, не зависящего от выбора корня x_i. Отсюда вытекают оба утверждения леммы. □

3.4. Расширения степени трансцедентности один. В этом пункте приводятся простые вычисления, на которых основаны доказательство теоремы Лиувилля (п. 3.6) и критерии элементарности логарифмических (§ 4) и экспоненциальных интегралов (§ 5).

Пусть $K\subset F$ — пара вложенных дифференциальных полей, где поле F как поле (а не как дифференциальное поле!) порождено над K одним элементом $t\in F$ и элемент t трансцендентен над полем K. В этом случае поле F можно рассматривать как снабженное новой операцией дифференцирования поле рациональных функций над полем K. Действительно, каждый элемент поля F представляется как значение на элементе $x=t$ единственной рациональной функции $G(x)$ над полем K: две различные рациональные функции не могут совпадать на элементе t, так как он трансцендентен над K. В частности, производная t' элемента t равняется $G(t)$, где G — рациональная функция над полем K. В этой ситуации дифференциальное поле F изоморфно полю рациональных функций над полем K с новой операцией дифференцирования D, определенной формулой $D\varphi=G\varphi'$, где φ' — обычная операция дифференцирования в поле рациональных функций над дифференциальным полем K.

Ниже мы ограничиваемся случаем, когда функция G, определяющая операцию дифференцирования, является полиномом P над полем K. Мы отождествляем поле F с полем рациональных функций над полем K, снабженных дифференцированием $D\varphi=P\varphi'$. Это дифференцирование переводит кольцо полиномов над полем K в себя.

Рациональная функция над любым полем K допускает мультипликативное и аддитивное представления. Напомним свойства этих представлений.

а. Мультипликативное представление. Каждую рациональную функцию R можно представить в виде произведения

$$R=AP_1^{k_1}\ldots P_l^{k_l},$$

где P_j — неприводимый над K полином со старшим коэффициентом, равным единице, k_j — целое число и A — элемент поля K. Такое представление единственно с точностью до перестановки сомножителей.

б. Аддитивное представление. Каждую рациональную функцию R можно разложить в правильную дробь, т. е. представить в виде суммы

$$R = Q + \sum_{j,m} \frac{Q_{m,j}}{L_j^m},$$

где Q — полином, L_j — неприводимый над K полином со старшим коэффициентом, равным единице, $Q_{m,j}$ — полином, степень которого меньше степени полинома L_j. Такое представление единственно с точностью до перестановки слагаемых. Полином Q будем называть *полиномиальной составляющей* функции R. Разность $R - Q$ будем называть *полярной составляющей* функции R, сумму $\sum\limits_m \frac{Q_{m,j}}{L_j^m}$ будем называть *L_j-полярной составляющей* функции R, член $\frac{Q_{m,j}}{L_j^m}$ в L_j-полярной составляющей, соответствующий максимальной степени m знаменателя, будем называть *старшим членом* L_j-полярной составляющей, а число m будем называть *порядком* L_j-полярной составляющей.

Следующие два утверждения очевидны.

Утверждение 3.6. *Пусть полиномы L_j и DL_j взаимно просты. Тогда для всякой рациональной функции L_j-полярная составляющая ее производной зависит лишь от L_j-полярной составляющей функции: если $\frac{Q_m}{L_j^m}$ — старший член L_j-полярной составляющей функции R и Q — остаток от деления полинома $(-m)Q_m DL_j$ на полином L_j, то $\frac{Q}{L_j^{m+1}}$ — старший член L_j-полярной составляющей производной DR.*

Утверждение 3.7. *Пусть P_k — неприводимые полиномы с единичными старшими коэффициентами и μ_k — комплексные числа. Тогда полярная составляющая функции $\sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$ равна $\sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \frac{Q_k}{P_k}$, где Q_k — остаток при делении полинома DP_k на полином P_k* (если полиномы DP_k и P_k имеют общий множитель, то остаток Q_k равен нулю и его не нужно учитывать в написанной сумме).

Скажем, что у элемента $g \in F$, рассматриваемого как значение рациональной функции G над полем K на элементе t, существует *представление Лиувилля*, если функция G представима в виде

$$G=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\frac{DR_i}{R_i}+DR_0.$$

В этом представлении каждую из рациональных функций R_i при $i=1,\ldots,q$ запишем в мультипликативном виде $R_i=A_iP_{i_1}^{k_{i_1}}\ldots P_{i_l}^{k_{i_l}}$, где P_{i_j} — неприводимые над K полиномы со старшим коэффициентом, равным единице, k_{i_j} — целые числа и A_i — элемент поля K. Воспользовавшись леммой 3.3, линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{q}\lambda_i\frac{DR_i}{R_i}$ логарифмических производных функций R_i представим в виде суммы линейных комбинаций $\sum\limits_{i=1}^{q}\lambda_i\frac{A_i'}{A_i}$ логарифмических производных элементов A_i поля K и линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{p}\mu_k\frac{DP_k}{P_k}$ логарифмических производных полиномов P_k. Итак, функция G, допускающая представление Лиувилля, записывается в следующем виде:

$$G=\sum\lambda_i\frac{A_i'}{A_i}+\sum\mu_k\frac{DP_k}{P_k}+DR_0.$$

Наша ближайшая цель — выяснить, как связаны L_j-полярные составляющие функции G и функций R_0 и $\frac{DP_k}{P_k}$. Приведем вычисления для L_j-полярных составляющих в случае, когда полиномы L_j и DL_j взаимно просты. В этом случае из утверждений 3.6, 3.7 вытекает, что если L_j-полярная составляющая функции R_0 не равна нулю, то порядок L_j-полярной составляющей ее производной DR_0 больше единицы, в то время как порядок L_j-полярной составляющей логарифмической производной $\frac{DL_j}{L_j}$ равен единице. Пользуясь этим замечанием, из утверждений 3.6, 3.7 легко вывести такие следствия.

Следствие 3.8. *Пусть полиномы L_j и DL_j взаимно просты. Тогда L_j-полярная составляющая функции G имеет порядок, больший единицы, если и только если L_j-полярная составляющая функции R_0 не равна нулю. В этом случае старший член L_j-полярной составляющей функции G равен старшему члену L_j-полярной составляющей функции DR_0.*

Следствие 3.9. *Пусть полиномы L_j и DL_j взаимно просты. Тогда L_j-полярная составляющая функции G имеет порядок, равный единице, если и только если L_j-полярная составляющая функции R_0*

равна нулю, а в линейной комбинации логарифмических производных есть слагаемое $\mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, *в котором* $P_k = L_j$ *и* $\mu_k \neq 0$. *В этом случае старший член* L_j*-полярной составляющей функции* G *равен старшему члену* L_j*-полярной составляющей функции* $\mu_k \frac{DL_j}{L_j}$.

3.5. Присоединение интеграла и экспоненты интеграла. В этом пункте мы продолжим вычисления, начатые в п. 3.4, для случая, когда поле F получается присоединением к полю K интеграла над полем K и экспоненты интеграла над полем K.

Лемма 3.10. *Пусть* $t \in F$ *— трансцендентный элемент над полем* K *и* $L \in K[x]$ *— неприводимый полином над полем* K. *Тогда*

1) *если* t *— интеграл над полем* K, *т. е.* $t' = f$, $f \in K$, *то полиномы* DL *и* L *не имеют общего множителя*;

2) *если* t *— экспонента интеграла над полем* K, *т. е.* $t' = ft$, $f \in K$, *то полиномы* DL *и* L *имеют общий множитель, если и только если* $L \equiv x$.

Доказательство. Прежде всего, наличие или отсутствие общего множителя у полиномов L и DL не зависит от умножения полинома L на элемент $a \in K$, $a \neq 0$. Это видно из тождества Лейбница $D(aL) = a'L + aD(L)$. Если t — интеграл над K, $t' = f$, то, домножив, если надо, полином L на элемент поля K, можно считать, что старший коэффициент полинома L равен единице, $L(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. В этом случае полином $DL = (nf + a_1)x^{n-1} + \ldots$ имеет меньшую степень, чем полином L, и никак не может делиться на неприводимый полином L.

Если t — экспонента интеграла над K, $t' = ft$, и неприводимый полином L не совпадает с полиномом $L \equiv x$, то домножив L, если надо, на элемент поля K, можно считать, что свободный член полинома L равен единице, $L(x) = a_n x^n + \ldots + 1$ (неприводимый полином имеет нулевой свободный член, только если $L \equiv x$). В этом случае полином $DL = (a_n' + n a_n f)x^n + \ldots$ имеет ту же степень, что и полином L, но свободный член полинома DL равен нулю. Поэтому он не может делиться на полином L. □

Замечание. Используя теорему Ролля и вычисления из леммы 3.10, легко показать, что каждая *вещественная функция Лиувилля* (см. [49]) *имеет лишь конечное число вещественных корней, причем это число корней можно явно оценить сверху* (в частности, функция sin не является вещественной функцией Лиувилля). Теория малочленов (см. [50]) содержит далекие многомерные обобщения оценок такого рода.

Лемма 3.11. *Пусть $t \in F$ — трансцендентный элемент над полем K, являющийся интегралом над K, т. е. $t' = f$, где $f \in K$, и пусть $Q \in K[x]$ — полином степени n. Производная элемента $Q(t)$ является значением на элементе t полинома $DQ = fQ'$. Если старший коэффициент полинома Q не константа, то степень полинома DQ равна n. В противном случае степень полинома DQ равна $n-1$. В частности, $Q(t)$ — интеграл над K, если и только если $Q = cx + b$, где c — константа и $b \in K$.*

Доказательство. Пусть $Q = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$ Тогда $DQ = a'_n x^n + (a'_{n-1} + n a_n f) x^{n-1} + \ldots$ Многочлен DQ имеет степень, меньшую чем n, если и только если элемент a_n является константой, т. е. $a_n = c_1 \in \mathbb{C}$. Этот полином не может иметь степень, меньшую чем $n-1$. Действительно, если $a'_{n-1} + n a_n f = 0$, то $\left(\frac{-a_{n-1}}{nc_1}\right)' = f$. Так как $t' = f$, то $t = \frac{-a_{n-1}}{nc_1} + c_2$, где $c_2 \in \mathbb{C}$, и, следовательно, $t \in K$. Включение $t \in K$ противоречит трансцендентности элемента t над полем K. □

Лемма 3.12. *Пусть $t \in F$ — трансцендентный элемент над полем K, являющийся экспонентой интеграла над K, т. е. $t' = ft$, где $f \in K$, и пусть $Q(x) = \sum\limits_{m \leqslant k \leqslant n} a_k x^k$ — полином Лорана над K. Производная элемента $Q(t)$ равна $DQ(t)$, где $DQ(x) = \sum\limits_{m \leqslant k \leqslant n} (a'_k + k a_k f) x^k$ — полином Лорана, коэффициент $a'_k + k a_k f$ которого не равен нулю, если $k \neq 0$ и $a_k \neq 0$. В частности, элемент $Q(t)$ является интегралом над K, если и только если полином Лорана Q совпадает со своим свободным членом a_0.*

Доказательство. Покажем, что если $k \neq 0$ и $a_k \neq 0$, то коэффициент $a'_k + k a_k f$ не может обращаться в нуль. Действительно, в противном случае элементы a_k и t^{-k} удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению: $a'_k = -k f a_k$ и $(t^{-k})' = -k t^{-k-1} f t = -k f t^{-k}$, откуда следует, что $t^{-k} = c a_k$, где c — константа. Значит, элемент t алгебраичен над полем K, что противоречит предположению о его трансцендентности. □

3.6. Доказательство теоремы Лиувилля. Вернемся к доказательству теоремы Лиувилля.

а. Случай алгебраического расширения. Пусть поле $F_1 = K\langle x_1\rangle$ получено из K присоединением корня x_1 неприводимого над K полинома P степени n. Каждый элемент поля F_1 является значением на x_1 некоторого полинома над полем K степени меньше n. По индукционному предположению существуют полиномы $M_1, \ldots, M_q$ и M_0 степени меньше n, такие что

$$f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{(M_i(x_1))'}{M_i(x_1)} + (M_0(x_1))'.$$

Пусть F — дифференциальное поле, полученное из K присоединением всех корней $x_1, \ldots, x_n$ полинома P, и $K\langle x_i\rangle$ — подполе в F, полученное присоединением к K элемента x_i. В силу изоморфизма полей $K\langle x_1\rangle, \ldots, K\langle x_n\rangle$ для каждого $k = 1, \ldots, n$ (см. лемму 3.5) имеем

$$f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{(M_i(x_k))'}{M_i(x_k)} + (M_0(x_k))'.$$

Возьмем в поле F среднее арифметическое полученных n тождеств. Согласно лемме 3.3 для каждого i имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(M_i(x_k))'}{M_i(x_k)} = \frac{Q_i'}{Q_i},$$

где $Q_i = M_i(x_1)\ldots M_i(x_n)$. Элементы Q_i и $Q_0 = \frac{1}{n}(M_0(x_1) + \ldots + M_0(x_n))$ симметрично зависят от корней полинома P и поэтому лежат в поле K. Итак, $f = \sum\limits_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{n} \frac{Q_i'}{Q_i} + Q_0'$, где $Q_1, \ldots, Q_q$, $Q_0 \in K$. В случае алгебраического расширения $K \subset F_1$ индукционный шаг сделан.

б. Случай присоединения логарифма t. Пусть поле F_1 получается из K присоединением трансцендентного над K элемента t, являющегося логарифмом над K (т. е. $t' = a'/a$, где $a \in K$). Логарифм над полем K является интегралом над полем K — его производная a'/a лежит в поле K. Мы рассматриваем F_1 как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования $D\varphi = (a'/a)\varphi'$. По лемме 3.10 каждый неприводимый полином L взаимно прост со своей производной DL.

По индукционному предположению элемент f допускает представление Лиувилля над полем F_1, т. е. (см. п. 3.4) элемент f записывается в виде

$$f = \sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k} + DR_0.$$

Применим следствия 3.8 и 3.9 к функции $G = f$, не зависящей от t. Так как все L_j-полярные составляющие функции f равны нулю, то равны нулю все L_j-полярные составляющие функции R_0 и все логарифмические члены $\mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, т. е. $f = \sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + DQ$, где Q — полиномиальная составляющая функции R_0. Производная полинома Q должна лежать в поле K. По лемме 3.11 имеем $Q(t) = ct + A$, где c — комплексная константа и $A \in K$. По условию $t = a'/a$, поэтому

$$f = \sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + c\frac{a'}{a} + A'.$$

В случае логарифмического расширения $K \subset F_1$ индукционный шаг сделан.

в. Случай присоединения экспоненты *t*. Пусть поле F_1 получается из K присоединением трансцендентного над K элемента t, являющегося экспонентой над K (т. е. $t' = a't$, где $a \in K$). Экспонента над полем K является частным случаем экспоненты интеграла над полем K. Мы рассматриваем F_1 как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования $D\varphi = (a't)\varphi'$. По лемме 3.10 каждый неприводимый полином $L_j \neq x$ взаимно прост со своей производной.

По индукционному предположению элемент f допускает представление Лиувилля над полем F_1, т. е. (см. п. 3.4) элемент f записывается в виде

$$f = \sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k} + DR_0.$$

Применим следствия 3.8, 3.9 к функции $G = f$, не зависящей от t. Так как все L_j-полярные составляющие функции f равны нулю, то при $L_j \neq x$ равны нулю все L_j-полярные составляющие функции R_0 и все логарифмические члены $\mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, где $P_k \neq x$, т. е.

$$f = \sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + \sum D\left(\frac{a_m}{x^m}\right) + \mu\frac{Dx}{x} + DQ,$$

где Q — полиномиальная составляющая функции R_0 (в правой части мы должны сохранить производную $\sum D\left(\frac{a_m}{x^m}\right)$ от x-полярной части функции R_0 и логарифмический член $\mu\frac{Dx}{x}$).

По определению значение рациональной функции $\mu\frac{Dx}{x}$ на элементе t равно $\mu a' \in K$. Поэтому производная $D\left(Q + \sum \frac{a_m}{x^m}\right)$ лежит в поле K. По лемме 3.12 это возможно, лишь если полином Лорана $Q+\sum \frac{a_m}{t^m}$ совпадает со своим свободным членом A. Имеем

$$f=\sum \lambda_m \frac{A_m'}{A_m}+(\mu a+A)'.$$

В случае экспоненциального расширения $K\subset F_1$ индукционный шаг сделан.

Теорема Лиувилля об интегралах доказана.

§ 4. Интегрирование функций, содержащих логарифм

В этом параграфе приводится критерий элементарности первообразных 1-форм вида $R(z,u)\,dz$, где R — рациональная функция двух переменных, z — комплексная переменная и $u=\ln a$ для некоторой рациональной функции a комплексной переменной z. Другими словами, приводится критерий элементарности интегралов от функций, лежащих в логарифмическом расширении F дифференциального поля K рациональных функций комплексной переменной z, т. е. $K=\mathbb{C}\langle z\rangle$, $F=K\langle t\rangle$, $t'=a'/a$, $a\in K$. Поле F мы будем рассматривать как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования D, где $D\varphi=(a'/a)\varphi'$ (см. введение к § 3 и п. 3.4). Согласно теореме Лиувилля функция $G(t)\in F$ имеет элементарный интеграл, если и только если она представима (см. п. 3.4) в виде

$$G=\sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}+\sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}+DR_0.$$

Введем несколько определений. *Кратностью* ненулевой L_j-полярной составляющей рациональной функции R назовем число $q-1$, где q — порядок этой составляющей. Будем говорить, что L_j-полярная составляющая *некратна*, если ее кратность равна нулю. Будем говорить, что рациональная функция R имеет *некратную полярную составляющую*, если некратны все ее L_j-полярные составляющие.

4.1. Полярная часть интеграла. Функцию Ψ будем называть *полярной частью интеграла* функции G, если полиномиальная составляющая функции Ψ равна нулю и полярная составляющая функции $G-D\Psi$ некратна. *Для каждой функции G существует не более одной полярной части интеграла.* Действительно, различные функции Ψ_1

и Ψ_2, не имеющие полиномиальных составляющих, должны иметь различные L_j-полярные составляющие для некоторого полинома L_j. Для этого полинома L_j-полярная составляющая функции $D\Psi_1 - D\Psi_2$ имеет положительную кратность. Поэтому функции Ψ_1 и Ψ_2 не могут одновременно быть полярными частями интеграла функции G.

Утверждение 4.1. *Для каждой функции G существует полярная часть интеграла. Более того, ее можно явно вычислить по набору L_j-полярных составляющих функции G, имеющих положительную кратность.*

Доказательство. Опишем итерационное построение полярной части интеграла. На каждом шаге исходная задача сводится к аналогичной задаче для новой рациональной функции, имеющей меньшую суммарную кратность полярных составляющих.

Пусть для некоторого полинома L_j степени p старший член L_j-полярной составляющей функции G равен Q/L_j^{m+1}, где Q — полином степени меньше p и $m > 0$. Выберем полином T степени меньше p, такой что старший член L_j-полярной составляющей функции $D\left(\frac{T}{L_j^m}\right)$ равен Q/L_j^{m+1}, т. е. $(-m)T\,DL_j \equiv Q \mod L_j$. Обозначим через l_j полином, для которого выполняется сравнение $(DL_j)l_j \equiv 1 \mod L_j$. Полином l_j явно строится по полиному DL_j при помощи алгоритма Евклида (напомним, что полиномы DL_j и L_j взаимно просты). Теперь достаточно выбрать в качестве полинома T остаток при делении полинома $Ql_j/(-m)$ на полином L_j.

Функция $G_1 = G - D(T/L_j^m)$ имеет меньшую суммарную полярную кратность, чем функция G. Поэтому можно считать, что полярная часть Ψ_1 интеграла функции G_1 уже найдена. По построению полярная часть Ψ интеграла функции G равна $\Psi_1 + T/L_j^m$. □

Утверждение 4.1 сводит задачу интегрирования рациональных функций к задаче интегрирования рациональных функций с некратной полярной составляющей.

4.2. Логарифмическая часть интеграла. Пусть G — рациональная функция, имеющая некратную полярную часть. Функция $\Phi = \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, где P_k — неприводимые полиномы с единичным старшим коэффициентом, а μ_k — комплексные числа, называется *логарифмической частью интеграла* функции G, если функция $G - \Phi$ является полиномом.

Рассмотрим аддитивное представление функции G, имеющей некратную полярную составляющую: $G = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} Q_j/L_j + Q$, где L_j — неприводимые полиномы с единичными старшими коэффициентами, Q и Q_j — полиномы, причем степень полинома Q_j меньше степени полинома L_j.

Утверждение 4.2. *Пусть определенная выше функция G представима в форме Лиувилля. Тогда для каждого j, $0 \leqslant j \leqslant n$, выполняется тождество $Q_j \equiv \mu_j DL_j$, где μ_j — комплексное число. При выполнении этих условий функция $\Phi = \sum Q_j/L_j$ равняется производной функции $\sum \mu_j \ln L_j$ и является логарифмической частью интеграла функции G.*

Доказательство. Мы имеем дело с логарифмическим расширением поля K. Производная DL_j полинома L_j имеет меньшую степень, чем полином L_j, так как старший коэффициент полинома L_j равен единице. Поэтому старший член L_j-полярной составляющей функции $\frac{DL_j}{L_j}$ равен $\frac{DL_j}{L_j}$. Это вычисление сводит утверждение 4.2 к следствиям 3.8, 3.9. □

Следствие 4.3. *Функция G, у которой равна нулю полиномиальная составляющая, а полярная составляющая некратна, имеет элементарный интеграл, если и только если для нее выполняются условия утверждения* 4.2.

Как правило, для рациональных функций, имеющих некратную полярную часть, условия утверждения 4.2 не выполняются. Поэтому, как правило, такие функции имеют неэлементарные интегралы.

Пример. Пусть f, g — рациональные функции переменной z, причем функция f не равна константе. Тогда *интеграл $\int \frac{g\,dz}{\ln f}$ является обобщенной элементарной функцией, если и только если функция gf/f' тождественно равна константе*. В частности, интеграл $\int \frac{dz}{\ln z}$ неэлементарен.

4.3. Интегрирование полинома от логарифма. Пусть теперь G — полином, $G(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$, $t' = a'/a$ и $a, a_0, \ldots, a_n \in K = \mathbb{C}\langle z \rangle$. Двучлен $\Delta_n = ct^{n+1} + b_n t^n$ назовем *n-й полиномиальной компонентой интеграла G*, если полином $G - D\Delta_n$ имеет степень, меньшую чем n. Мы будем пользоваться тем обстоятельством, что элемент a, фигурирующий в определении логарифмического расширения $F = K\langle t \rangle$,

$t' = a'/a$, и коэффициенты a_k полинома G являются рациональными функциями комплексной переменной z. Рассмотрим следующие две 1-формы комплексной переменной z: $(a'/a)\,dz$ и $a_n\,dz$. Будем рассматривать вычеты $\operatorname{res}_q(a'/a)\,dz$ и $\operatorname{res}_q a_n\,dz$ этих форм в точке q комплексной прямой как функции точки $q \in \mathbb{C}$ (эти функции на комплексной прямой равны нулю всюду, кроме конечного числа точек).

Утверждение 4.4. *Если полином $G = a_n t^n + \ldots$ степени $n > 0$ представим в форме Лиувилля, то для некоторого комплексного числа μ для любой точки $q \in \mathbb{C}$ выполняется тождество $\operatorname{res}_q a_n\,dz \equiv \equiv \mu \operatorname{res}_q(a'/a)\,dz$. При выполнении этого условия существует двучлен $\Delta_n = ct^{n+1} + b_n t^n$, в котором коэффициент c равен $\mu/(n+1)$, а коэффициент b_n является рациональной функцией комплексной переменной z, определенной с точностью до аддитивной постоянной равенством $b_n' = a_n - \mu a'/a$. Этот двучлен Δ_n является n-й полиномиальной компонентой интеграла G.*

Доказательство. Пусть полином G представим в форме Лиувилля (см. п. 3.4). Из следствий 3.8, 3.9 видно, что полином G должен быть производной некоторого полинома G_0, т. е. $G = DG_0$. Согласно лемме 3.11 старшие мономы полинома G_0 имеют вид $G_0 = ct^{n+1} + + b_n t^n + \ldots$, где c — комплексная константа (возможно, равная нулю). Дифференцируя, получим

$$DG_0(t) = ((n+1)c(a'/a) + b_n')t^n + \ldots$$

Рациональная функция b_n комплексной переменной z должна удовлетворять уравнению $b_n' = a_n - (n+1)c(a'/a)$. Это уравнение имеет рациональное решение, если и только если все вычеты формы $(a_n - (n+1)c(a'/a))\,dz$ равны нулю, откуда вытекает утверждение 4.4. □

Как правило, для полиномов положительной степени n условия утверждения 4.4 не выполняются, поэтому полиномы от логарифмов обычно имеют неэлементарные интегралы.

Пример. Пусть f, g — рациональные функции переменной z, причем функция f не равна константе. Тогда *интеграл $\int g \ln f\,dz$ является обобщенной элементарной функцией, если и только если функция g представима в виде $cf'/f + \varphi'$, где c — константа, а φ — рациональная функция*. В частности, неэлементарен интеграл

$$\int \frac{\ln z\,dz}{z-1}.$$

4.4. Интегрирование функций, лежащих в логарифмическом расширении поля $\mathbb{C}\langle z\rangle$. Мы приходим к процедуре, позволяющей либо найти интеграл функции G, либо доказать, что этот интеграл не берется в обобщенных элементарных функциях.

Шаг 1. Если рациональная функция G имеет кратную полярную составляющую, то, пользуясь утверждением 4.1, можно найти полярную часть Ψ интеграла функции G и перейти к функции $G_s = G - D\Psi$, у которой полярная составляющая некратна.

Шаг 2. Для рациональной функции G_s с некратной полярной составляющей нужно проверить выполнение условий утверждения 4.2. Если эти условия не выполнены, то интеграл функции G не берется в обобщенных элементарных функциях. Если условия утверждения 4.2 выполнены, то можно найти логарифмическую часть Φ интеграла функции G_s. По построению интеграл функции Φ является линейной комбинацией логарифмов, а функция $G_s - \Phi$ является полиномом G_n некоторой степени n.

Шаг 3_n. Для полинома G_n нужно проверить выполнение условий утверждения 4.4. Если они не выполнены, то интеграл функции G не берется в обобщенных элементарных функциях. Если условия утверждения выполнены, то можно найти двучлен Δ_n, являющийся n-й полиномиальной компонентой интеграла полинома G. Функция $G_n - D\Delta_n$ является полиномом G_{n-1} степени $n-1$.

Шаги 3_{n-1}, …, 3_1. Повторяя процедуру шага 3_n, мы либо будем переходить к полиномам все меньшей и меньшей степени, либо на некотором шаге докажем неэлементарность исходного интеграла.

Шаг 3_0. Если мы дойдем до полинома G_0 нулевой степени, то исходный интеграл элементарен. Действительно, полином нулевой степени — это рациональная функция комплексной переменной z, и интеграл от нее всегда берется в элементарных функциях.

§ 5. Интегрирование функций, содержащих экспоненту

В этом параграфе приводится критерий элементарности первообразных 1-форм вида $R(z, u)\,dz$, где R — рациональная функция двух переменных, z — комплексная переменная и $u = \exp a$ для некоторой рациональной функции a комплексной переменной z. Другими словами, приводится критерий элементарности интегралов от функций, лежащих в экспоненциальном расширении F дифференциального поля K рациональных функций одной переменой z, т. е. $K=\mathbb{C}\langle z\rangle$, $F=K\langle t\rangle$, $t'=a't$, $a\in K$. Поле F мы будем рассматривать как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования D, где $D\varphi(t)=a'(t)t\varphi'(t)$ (см. введение к § 3 и п. 3.4).

Согласно теореме Лиувилля функция $G(t)\in F$ имеет элементарный интеграл, если и только если она представима (см. п. 3.4) в виде

$$G=\sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}+\sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}+DR_0.$$

Модифицируем для экспоненциального случая определения из § 4. Неприводимый полином x играет особую роль для экспоненциальных расширений: это единственный неприводимый полином L, который является делителем своей производной DL (см. лемму 3.10).

5.1. Главная полярная часть интеграла. *Главной полярной составляющей* рациональной функции R назовем сумму ее L_j-полярных составляющих по всем неприводимым полиномам L_j, кроме полинома $L=x$.

Рассмотрим полином, являющийся полиномиальной составляющей рациональной функции R. Сумму всех мономов этого полинома, кроме свободного члена, назовем *главной полиномиальной составляющей* функции R.

Назовем *лорановской составляющей* функции R сумму ее полиномиальной составляющей и ее x-полярной составляющей.

Функцию Ψ назовем *главной полярной частью интеграла* функции G, если ее лорановская составляющая равна нулю и главная полярная составляющая функции $G-D\Psi$ некратна.

Утверждение 5.1. *Для каждой функции G существует главная полярная часть интеграла. Более того, ее можно явно вычислить, если знать набор всех L_j-полярных составляющих, входящих в главную полярную составляющую функции G и имеющих положительную кратность.*

Мы не будем останавливаться на доказательстве утверждения 5.1 — оно дословно повторяет доказательство утверждения 4.1. Единственное различие — в процессе итерационного построения главной полярной части интеграла функции G не нужно обращать внимание на x-полярную составляющую этой функции.

Утверждение 5.1 сводит задачу интегрирования рациональных функций к задаче интегрирования рациональных функций с некратной главной полярной составляющей.

5.2. Главная логарифмическая часть интеграла. Пусть G — рациональная функция, имеющая некратную главную полярную часть. Функция $\Phi = \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, где P_k — не равный x неприводимый полином с единичным старшим коэффициентом, а μ_k — комплексное число, называется *главной логарифмической частью интеграла функции* G, если функция $G - \Phi$ является полиномом Лорана.

Рассмотрим аддитивное представление функции G, имеющей некратную главную полярную составляющую, $G = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{Q_j}{L_j} + Q$, где L_j — не равный x неприводимый полином с единичным старшим коэффициентом, Q_j — полином, степень которого меньше степени полинома L_j, и Q — полином Лорана. Обозначим через $[DL_j]$ остаток при делении полинома DL_j на полином L_j.

Утверждение 5.2. *Пусть определенная выше функция G представима в форме Лиувилля. Тогда для каждого j, $0 \leqslant j \leqslant n$, выполняется тождество $Q_j \equiv \mu_j [DL_j]$, где μ_j — комплексное число. При выполнении этих условий функция $\Phi = \sum \mu_j \frac{DL_j}{L_j} = \sum \mu_j (\ln L_j)'$ является главной логарифмической частью интеграла функции G, а разность $\Phi - \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{[DL_j]}{L_j}$ лежит в поле $K = \mathbb{C}\langle z \rangle$.*

Доказательство. Мы имеем дело с экспоненциальным расширением поля K. Производная DL_j полинома L_j имеет ту же степень, что полином L_j. Следовательно, разность $\frac{DL_j}{L_j} - \frac{[DL_j]}{L_j}$ лежит в поле $K = \mathbb{C}\langle z \rangle$. Это вычисление сводит утверждение 4.2 к следствиям 3.8, 3.9. □

Следствие 5.3. *Функция G, у которой главная полярная составляющая некратна и главная лорановская составляющая равна нулю, имеет элементарный интеграл, если и только если для нее выполняются условия утверждения* 5.2.

Доказательство. Если функция G удовлетворяет условию утверждения 5.2, то для нее существует главная логарифмическая часть интеграла Φ, которая имеет элементарный интеграл. Разность

$G - \Phi$ — рациональная функция комплексной переменной z. Ее интеграл тоже элементарен. □

Как правило, для рациональных функций, имеющих некратную главную полярную часть, условия утверждения 5.2 не выполняются. Поэтому обычно такие функции имеют неэлементарные интегралы.

Пример. Пусть f, g, h — рациональные функции комплексной переменной z, причем функция f не равна константе, а функция h не равна нулю. Рассмотрим интеграл $\int \frac{g\,dz}{\exp f + h}$. *Для элементарности интеграла необходимо и достаточно, чтобы функция $g/(h' - f'h)$ была постоянна* (действительно, в этом примере $L = t + h$, $DL = f't + h'$, $[DL] = h' - f'h$). В частности, интеграл $\int \frac{g\,dz}{\exp z + 1}$ элементарен, если и только если рациональная функция g постоянна.

5.3. Интегрирование полинома Лорана от экспоненты. Пусть теперь $G(t) = \sum\limits_{m \leqslant k \leqslant n} a_k t^k$ — полином Лорана над K с нулевым свободным членом, $t' = a't$ и $a, a_m, \ldots, a_k \in K$, $a_0 = 0$.

Утверждение 5.4. 1. *Пусть полином Лорана G представим в форме Лиувилля. Тогда существует полином Лорана Δ с нулевым свободным членом, такой что $D\Delta = G$.*

2. *Для существования полинома Лорана Δ необходимо и достаточно, чтобы для любого k, такого что $m \leqslant k \leqslant n$ и $k \neq 0$, линейное дифференциальное уравнение $b_k' + kb_k a' = a_k$ имело решение в поле K, $b_k \in K$. При этом $\Delta = \sum\limits_{m \leqslant k \leqslant n} b_k t^k$.*

Доказательство. Из следствий 3.8, 3.9 вытекает, что форма Лиувилля для полинома Лорана имеет нулевую главную полярную часть и нулевую главную логарифмическую часть и, следовательно, является полиномом Лорана. Согласно лемме 3.12 для полинома Лорана Δ выполняется равенство $D\Delta = G$, если и только если он удовлетворяет условиям п. 2 утверждения 5.4. □

Как правило, дифференциальные уравнения над полем $K = \mathbb{C}\langle z\rangle$, о которых идет речь в утверждении 5.4, не имеют решений, являющихся рациональными функциями комплексной переменной z. Поэтому полиномы Лорана над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ от функции $u = \exp a(z)$ обычно имеют неэлементарные интегралы. Ниже мы обсудим критерий разрешимости встретившихся дифференциальных уравнений в рациональных функциях.

5.4. Разрешимость линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Мы переходим к вопросу о разрешимости в рациональных функциях комплексной переменной z линейных дифференциальных уравнений вида $y' + f'y = g$, где f, g — рациональные функции от z. Этот вопрос решается следующим образом. Если рациональное решение y существует, то по коэффициентам f и g можно найти полюсы решения y и порядки этих полюсов (см. следствие 5.6). Тем самым можно априори указать конечномерное линейное пространство, в котором должно лежать рациональное решение уравнения, если оно существует. После этого метод неопределенных коэффициентов позволяет либо явно найти рациональное решение уравнения, либо доказать, что такого решения не существует (впрочем, отсутствие рационального решения часто видно без всяких вычислений).

Для всякой ненулевой рациональной функции φ обозначим через $\operatorname{ord}_a(\varphi)$ порядок функции φ в точке a на сфере Римана. Если $a \neq \infty$, то порядки функции и ее производной удовлетворяют следующим соотношениям: если $\operatorname{ord}_a(\varphi) \neq 0$, то $\operatorname{ord}_a(\varphi') = \operatorname{ord}_a(\varphi) - 1$. Если $\operatorname{ord}_a(\varphi) = 0$ и функция φ не константа, то $\operatorname{ord}_a(\varphi') \geqslant 0$. В частности, порядок производной в конечной точке никогда не равен -1. В точке ∞ соотношения принимают следующий вид: если $\operatorname{ord}_\infty(\varphi) \neq 0$, то $\operatorname{ord}_\infty(\varphi') = \operatorname{ord}_\infty(\varphi) + 1$. Если $\operatorname{ord}_\infty(\varphi) = 0$ и функция φ не константа, то $\operatorname{ord}_\infty(\varphi') \geqslant 2$. В частности, порядок производной в точке ∞ никогда не равен 1.

Лемма 5.5. *Пусть рациональная функция y имеет полюс в точке a, а рациональная функция f не равна константе. Тогда*

1) *если $a \in \mathbb{C}$, то порядок функции $y' + f'y$ в точке a равен минимуму из чисел* $\operatorname{ord}_a(y) - 1$ *и* $\operatorname{ord}_a(f') + \operatorname{ord}_a(y)$;

2) *если $a = \infty$, то порядок функции $y' + f'y$ в точке ∞ равен минимуму из чисел* $\operatorname{ord}_\infty(y) + 1$ *и* $\operatorname{ord}_\infty(f') + \operatorname{ord}_\infty(y)$.

Доказательство. При сделанных предположениях функции y' и $f'y'$ в точке a имеют различные порядки. Поэтому порядок суммы этих функций равен минимуму из их порядков. □

Пусть уравнение $y' + f'y = g$ имеет рациональное решение. Следствие 5.6 описывает множество полюсов решения и их порядки.

Следствие 5.6. *Точка $a \in \mathbb{C}$ — полюс функции y в следующих двух случаях*:

1) $\operatorname{ord}_a(f) \geqslant 0$, $\operatorname{ord}_a(g) < -1$; *тогда* $\operatorname{ord}_a(y) = \operatorname{ord}_a(g) + 1$;

2) $\operatorname{ord}_a(f)<0$, $\operatorname{ord}_a(g)<\operatorname{ord}_a(f)-1$; *тогда* $\operatorname{ord}_a(y)=\operatorname{ord}_a(g)+1-\operatorname{ord}_a(f)$.

Точка ∞ — *полюс функции* y *в следующих двух случаях*:

1) $\operatorname{ord}_\infty(g)\leqslant 0$, $\operatorname{ord}_\infty(f)\geqslant 0$; *тогда* $\operatorname{ord}_\infty(y)=\operatorname{ord}_\infty(g)-1$;

2) $\operatorname{ord}_\infty(f)<0$, $\operatorname{ord}_\infty(g)<1+\operatorname{ord}_\infty(f)$; *тогда* $\operatorname{ord}_\infty(y)=\operatorname{ord}_\infty(g)-1-\operatorname{ord}_\infty(f)$.

Пусть конечные полюсы $a\in A\subset\mathbb{C}$ функции y имеют порядки $k_a=-\operatorname{ord}_a y$, а точка ∞ — полюс функции y порядка $m=-\operatorname{ord}_\infty y_a$. Тогда y принадлежит конечномерному пространству функций l вида

$$l=\sum_{\substack{a\in A\\ 0<i\leqslant -k_a}}\frac{c_{i,a}}{(z-a)^i}+c_0+\sum_{0<p\leqslant m}d_pz^p.$$

Подставляя в уравнение $y'+f'y=g$ вместо y функцию l с неопределенными комплексными коэффициентами $c_{i,a}$, c_0, d_p и с полюсами и их порядками, найденными в следствии 5.6, получим систему линейных уравнений на неопределенные коэффициенты. Если она не имеет решения, то уравнение не имеет решения в рациональных функциях. Если система имеет решение, то оно определяет рациональное решение y.

Пример 1. Пусть f, g — полиномы, причем *степень полинома g меньше, чем степень полинома f минус один. Тогда уравнение $y'+f'y=g$ не имеет рациональных решений*. Действительно, из-за неравенства на степени полиномов уравнение, очевидно, не имеет постоянных решений. Множество полюсов решения в силу следствия 5.6 пусто. В самом деле, в точке ∞ выполняется неравенство $\operatorname{ord}_\infty(f)<0$, но неравенство $\operatorname{ord}_\infty(g)<1+\operatorname{ord}_\infty(f)$ не выполнено. Непостоянная рациональная функция должна иметь полюсы. Поэтому уравнение не имеет рациональных решений.

Пример 2. *Если f, g — полиномы из примера* 1, *то интеграл $\int g(z)\exp f(z)\,dz$ не берется в обобщенных элементарных функциях.* В частности, $\int \exp z^2\,dz$ неэлементарен.

Пример 3. *Пусть функция g имеет полюс первого порядка в некоторой точке $a\in\mathbb{C}$, а функция f в точке a регулярна. Тогда уравнение $y'+f'y=g$ не имеет рациональных решений.* Действительно, пусть рациональное решение существует. Согласно следствию 5.6 оно не может иметь полюс в точке a. Значит, функция $y'+f'y$ регулярна в точке a и не может иметь в ней полюс.

Пример 4. *Интеграл $\int \frac{\exp z\, dz}{z}$ не берется в обобщенных элементарных функциях.* Действительно, интеграл связан с расширением поля $K = \mathbb{C}\langle z\rangle$ элементом t, таким что $t' = t$, и с полиномом $G(t) = (1/z)t$. Интеграл не берется, потому что уравнение $y' + y = 1/z$ не имеет рационального решения (см. пример 3).

Пример 5. *Интеграл $\int \frac{\sin z\, dz}{z}$ не берется в обобщенных элементарных функциях.* Действительно, интеграл связан с расширением поля $K = \mathbb{C}\langle z\rangle$ элементом t, таким что $t' = it$, и с полиномом Лорана $G(t) = \frac{1}{2iz}t - \frac{1}{2iz}t^{-1}$. Интеграл не берется, потому что уравнения $y' + iy = \frac{1}{2iz}$ и $y' - iy = -\frac{1}{2iz}$ не имеют рациональных решений (см. пример 3).

5.5. Интегрирование функций, лежащих в экспоненциальном расширении поля $\mathbb{C}\langle z\rangle$. Мы приходим к процедуре, позволяющей либо найти интеграл функции G, либо доказать, что этот интеграл не берется в обобщенных элементарных функциях.

Шаг 1. Если рациональная функция G имеет кратную главную полярную составляющую, то, пользуясь утверждением 5.1, можно найти главную полярную часть Ψ интеграла функции G и перейти к функции $G_s = G - D\Psi$, у которой главная полярная составляющая некратна.

Шаг 2. Для рациональной функции G_s с некратной главной полярной составляющей нужно проверить выполнение условий утверждения 5.2. Если эти условия не выполнены, то интеграл функции G не берется в обобщенных элементарных функциях. Если условия утверждения выполнены, то можно найти главную логарифмическую часть Φ интеграла функции G_s. По построению интеграл функции Φ является линейной комбинацией логарифмов, а функция $G_s - \Phi$ является полиномом Лорана G_L. Полином Лорана G_L есть сумма свободного члена $a_0 \in \mathbb{C}\langle z\rangle$ и полинома Лорана $G_{L,0}$, не имеющего свободного члена. Рациональная функция a_0 комплексной переменной z имеет элементарный интеграл.

Шаг 3. Для полинома Лорана $G_{L,0}$ нужно проверить выполнение условий утверждения 5.4. Для этого надо узнать, разрешимы ли в рациональных функциях дифференциальные уравнения, выписанные в утверждении 5.4. В п. 5.4 разобран вопрос о разрешимости таких уравнений. В результате мы либо находим интеграл функции

G, либо доказываем, что он не берется в обобщенных элементарных функциях.

§ 6. Интегрирование алгебраических функций

Если риманова поверхность алгебраической функции имеет нулевой род, то ее интеграл всегда берется в обобщенных элементарных функциях. Если же род римановой поверхности положителен, то интеграл, как правило, не элементарен и берется в обобщенных элементарных функциях в исключительных случаях. Эти исключительные случаи обсуждаются в настоящем параграфе.

Теорема 6.1 (Лиувилля об абелевых интегралах). *Неопределенный интеграл y от алгебраической функции A комплексной переменной x берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он представим в виде*

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} A(x)\,dx = A_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \ln A_i(x),$$

где A_i при $i = 0, 1, \ldots, k$ — алгебраические функции, однозначные на римановой поверхности W подынтегральной функции A.

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы Лиувилля об интегралах элементарных функций, примененной к полю F всех мероморфных функций на поверхности W, снабженному следующим дифференцированием: $f' = df/\alpha$, где $\alpha = \pi^* dx$ и $\pi \colon W \to \overline{\mathbb{C}}$ — естественная проекция римановой поверхности функции A на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ комплексной переменной x. □

Определим класс *обобщенных элементарных функций на римановой поверхности W* как класс многозначных функций, которые получаются из мероморфных функций на W при помощи арифметических операций, решения алгебраических уравнений и суперпозиций с функциями ln и exp. Пусть $\pi \colon W \to \overline{\mathbb{C}}$ — любое непостоянное мероморфное отображение поверхности W на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ переменной x. Как видно из определений, *обобщенная элементарная функция на римановой поверхности W — это функция вида $\pi^* f$, где f — обобщенная элементарная функция переменной x*. Переформулируем теорему 6.1 в более инвариантном виде.

Теорема Лиувилля об абелевых интегралах. *Неопределенный интеграл от мероморфной формы α на компактной римановой* *поверхности W является обобщенной элементарной функцией на W, если и только если форма α представима в виде $\alpha=\beta+\gamma$, где $\beta=dA_0$, $\gamma=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{dA_i}{A_i}$, $A_0,\ldots,A_k$ — мероморфные функции и $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — комплексные числа.*

В связи с теоремой Лиувилля об абелевых интегралах естественно рассмотреть формулируемые ниже (см. п. 6.1 и 6.2) задачи 1 и 2, первая из которых связана с теоремой Римана—Роха, а вторая — с теоремой Абеля.

6.1. Рациональная часть абелева интеграла. Задачу выделения рациональной части интеграла алгебраической функции можно сформулировать так.

Задача 1. Представить мероморфную форму α на поверхности W в виде $\alpha=\beta+\alpha_1$, где $\beta=dA_0$ — точная мероморфная форма, а форма α_1 имеет полюсы не выше первого порядка.

Лемма 6.2. *Если мероморфная форма β на поверхности W имеет полюсы не выше первого порядка и задает нулевой класс когомологий на $W\setminus P$, где P — конечное множество, содержащее полюсы формы β, то форма β тождественно равна нулю.*

Доказательство. Форма β имеет лишь нулевые вычеты, иначе она не может быть точной. Поэтому она вообще не имеет полюсов и ее интеграл A_0 является голоморфной функцией на W. Голоморфная функция на компактной поверхности постоянна. Поэтому $\beta=dA_0=0$. □

Следствие 6.3. *Если задача* 1 *для формы α разрешима, то она имеет не более одного решения.*

Пусть $O\subset W$ — множество полюсов формы α. Около каждого полюса $x\in O$ фиксируем локальную координату z, такую что $z(x)=0$. Пусть форма α около точки x записывается в виде

$$\alpha=\left(\frac{c_k}{z^k}+\ldots+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_1}{z}+\varphi\right)dz,$$

где φ — росток голоморфной функции в точке x. Росток

$$\left(\frac{c_k}{z^k}+\ldots+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_1}{z}\right)dz$$

называется *главной частью* формы α около точки x (главная часть зависит от выбора локальной координаты z). По теореме Римана—

Роха существуют формы α с произвольно заданными главными частями.

Росток мероморфной функции в полюсе x формы α

$$A_{0x}=\left(\frac{(-k+1)c_k}{z^{k-1}}+\ldots+\frac{(-1)c_2}{z}\right)$$

назовем *главной частью мероморфной составляющей интеграла* формы α в точке x. Росток A_{0x} обладает следующим свойством: форма $\alpha-dA_{0x}$ в точке x имеет полюс не выше первого порядка. Это свойство определяет росток A_{0x} с точностью до прибавления ростка голоморфной функции.

Условие разрешимости задачи 1. *Задача 1 для формы α разрешима, если и только если для набора A_{0x} главных частей мероморфных составляющих интеграла формы α в ее полюсах $x\in O$ и для всякой голоморфной формы ω на W выполнено соотношение* $\sum\operatorname{res}_x(A_{0x}\omega)=0$.

Доказательство. Пусть $\alpha=\beta+\alpha_1$ и $\beta=dA_0$. Для всякой голоморфной формы ω сумма вычетов формы $A_0\omega$ равна нулю, так как W — компактная риманова поверхность. Отсюда и вытекает нужное равенство. Обратно, если $\sum\operatorname{res}_x(A_{0x}\omega)=0$ для любой голоморфной формы ω, то по теореме Римана—Роха существует мероморфная функция A_0, имеющая полюсы лишь в точках $x\in O$ и такая, что для каждой точки $x\in O$ росток A_0-A_{0x} голоморфен. Очевидно, что форма $\alpha-dA_0$ имеет лишь полюсы не выше первого порядка. □

На кривой рода нуль не существует ненулевых голоморфных форм, и задача 1 всегда разрешима. На кривой положительного рода задача 1, как правило, не разрешима.

6.2. Логарифмическая часть абелева интеграла. Задачу выделения логарифмической части интеграла алгебраической функции можно сформулировать так.

Задача 2. 1. Для заданной мероморфной формы α на поверхности W найти форму γ, имеющую те же вычеты, что и форма α, и являющуюся линейной комбинацией дифференциалов логарифмов мероморфных функций.

2. Если искомая форма γ существует, представить ее в виде суммы $\gamma=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{dA_i}{A_i}$, где A_i — мероморфные функции на W, содержащей наименьшее возможное число слагаемых n.

Пусть P — множество точек x, в которых вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ формы α не равен нулю. На множестве P определена функция $\operatorname{res}\alpha\colon P \to \mathbb{C}^*$, сопоставляющая точке $x \in P$ вычет $\operatorname{res}_x \alpha$. С функцией $\operatorname{res}\alpha$ свяжем векторное пространство $V(\operatorname{res}\alpha) \subset \mathbb{C}$ над полем $\mathbb{Q}$, порожденное значениями функции $\operatorname{res}\alpha$.

Лемма 6.4. *Пусть сумма* $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ *является решением п.* 2 *задачи* 2 *для формы* α. *Тогда* 1) *числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *лежат в пространстве* $V(\operatorname{res}\alpha)$ *и образуют его базис,* 2) *носители дивизоров* (A_i) *функции* A_i *при* $i = 1, \ldots, n$ *лежат в множестве* P.

Доказательство. Согласно лемме 3.4 если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ зависимы над $\mathbb{Q}$, то число слагаемых в представлении формы γ можно уменьшить (выбрав другой набор мероморфных функций), что противоречит условию. Если x — нуль или полюс одной из функций $A_1, \ldots, A_n$, то вычет формы $\sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ в точке x не равен нулю, так как он является нетривиальной целочисленной линейной комбинацией чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Поэтому $x \in P$.

Рассмотрим целочисленные функции φ_i на множестве P, сопоставляющие точке $x \in P$ порядок функции A_i в этой точке, $\varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \frac{dA_i}{A_i}$. Покажем, что функции φ_i на множестве P линейно независимы. Действительно, из существования линейного соотношения $\sum \mu_i \varphi_i = 0$ вытекает, что форма $\omega = \sum \mu_i \frac{dA_i}{A_i}$ голоморфна на W. Покажем, что форма ω равна нулю. Представим ω как линейную комбинацию минимально возможного числа дифференциалов логарифмов мероморфных функции. Как мы только что показали, носители дивизоров этих мероморфных функций должны содержаться в множестве полюсов формы ω, т. е. дивизоры этих функций равны нулю, и поэтому $\omega \equiv 0$. Следовательно, формы $\frac{dA_i}{A_i}$ линейно зависимы, и число слагаемых в представлении формы γ можно уменьшить, что противоречит предположению. Мы доказали, что функции φ_i независимы.

Покажем, что числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ лежат в векторном пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Действительно, форма $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α, т. е. $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$ при $x \in P$. Так как φ_i — независимые целочисленные функции, то числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются линейными комбинациями с рациональными коэффициентами значений функции $\operatorname{res}\alpha$, т. е. они лежат в векторном пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ независимы над $\mathbb{Q}$. Они порождают пространство $V(\operatorname{res}\alpha)$, так как $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$. □

Следствие 6.5. *Если для формы α задача 2 разрешима, то существует единственная форма γ, удовлетворяющая п. 1 этой задачи.*

Доказательство. Если есть две формы, удовлетворяющие п. 1 задачи 2, то все вычеты разности этих форм равны нулю. Повторяя рассуждение из доказательства леммы 6.4, получим, что разность форм равна нулю. □

Следствие 6.6. *Если для формы α задача 2 разрешима, то число слагаемых в решении п. 2 задачи 2 для формы γ равно размерности пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$.*

Скажем, что дивизор $D = \sum r_i x_i$, $x_i \in W$, с рациональными коэффициентами $r_i = \frac{p_i}{g_i}$, имеющий степень $\sum r_i = 0$, *почти главный*, если существует такое натуральное число N, что дивизор ND главный, т. е. $ND = (A)$, где (A) — дивизор некоторой мероморфной функции A. Перефразируем это определение. Пусть k — наименьшее общее кратное знаменателей q_i коэффициентов r_i дивизора D. Дивизор $D = \sum r_i x_i$ с рациональными коэффициентами почти главный, если дивизор kD с целыми коэффициентами имеет конечный порядок в якобиане кривой W.

Утверждение 6.7. 1. *Сумма почти главных дивизоров — почти главный дивизор.*

2. *Произведение почти главного дивизора на рациональное число — почти главный дивизор.*

Доказательство. 1. Если $N_1 D_1 = (A_1)$ и $N_2 D_2 = (A_2)$, то тогда $(N_1 N_2)(D_1 + D_2) = (A_1^{N_2} A_2^{N_1})$.

2. Если $ND = (A)$ и $r = p/q$, то $Nq(rD) = (A^p)$. □

Для конечного множества P точек компактной римановой поверхности обозначим через $J_0(P)$ множество функций $\psi\colon P \to \mathbb{Q}$, принимающих рациональные значения и таких, что дивизор $D_\psi = \sum\limits_{x \in P} \psi(x) x$ почти главный. По только что доказанному утверждению функции множества $J_0(P)$ образуют векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Пространство $J_0(P)$ содержит решетку $\bar{J}_0(P)$ функций, соответствующих главным дивизорам. Пространство $J_0(P)$ порождается решеткой $\bar{J}_0(P)$ над рациональными числами.

Сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи 2. Пусть P — множество точек x, в которых вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ формы α не равен нулю. На множестве P определена функция $\operatorname{res}\alpha\colon P \to \mathbb{C}^*$, сопоставляющая точке $x \in P$ вычет $\operatorname{res}_x \alpha$. Выше мы связали с функцией $\operatorname{res}\alpha$ пространство $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на значения функции $\operatorname{res}\alpha$. Определим теперь еще одно пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — базис пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$. Рассмотрим координатные функции $\varphi_i\colon P \to \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, n$, определенные тождеством $\operatorname{res}_x \alpha = \sum \varphi_i(x)\lambda_i$. *Пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ — это векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.* Определение пространства $F(\operatorname{res}\alpha)$ корректно. Действительно, пусть $u_1, \ldots, u_n$ — другой базис пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$ и $\lambda_i = \sum a_{i,j}u_j$, где $\{a_{i,j}\}$ — обратимая $(n \times n)$-матрица с рациональными компонентами. Тогда $\operatorname{res}\alpha \equiv \sum \rho_j u_j$, где $\rho_j = \sum a_{i,j}\varphi_i$. Поэтому пространство над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на функции ρ_j, содержится в пространстве над полем $\mathbb{Q}$, натянутом на функции φ_j. Обратное включение доказывается так же.

Утверждение 6.8. *Для каждой функции $\varphi\colon P \to \mathbb{Q}$ из пространства $F(\operatorname{res}\alpha)$ справедливо равенство $\sum\limits_{x\in P} \varphi(x) = 0$.*

Доказательство. Сумма вычетов формы α равна нулю. Вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ можно рассматривать как вектор из пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. Если сумма векторов равна нулю, то при любом выборе базиса $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, сумма i-х координат этих векторов тоже равна нулю. □

Условие разрешимости задачи 2. *Задача 2 для формы α разрешима, если и только если пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ содержится в пространстве $J_0(P)$.*

Доказательство. Пусть задача 2 разрешима и сумма $\sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$, имеющая те же вычеты, что и форма α, содержит минимально возможное число членов. Рассмотрим целочисленные функции φ_i на множестве P, сопоставляющие точке $x \in P$ порядок функции A_i в этой точке, $\varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \frac{dA_i}{A_i}$. Форма $\gamma = \sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α, т. е. $\sum \lambda_i\varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$. По лемме 3.4 числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ образуют базис векторного пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. Поэтому пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ порождено функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Эти функции лежат в пространстве $J_0(P)$, так как дивизоры $D_i = \sum \varphi_i(x)x$ являются дивизорами функций A_i.

Пусть пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ содержится в пространстве $J_0(P)$. Выберем базис $\mu_1, \ldots, \mu_n$ пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. По условию функция $\operatorname{res}\alpha$ представима в виде $\operatorname{res}\alpha = \sum \mu_i \rho_i$, где функции ρ_i лежат в пространстве $J_0(P)$. Это означает, что для каждого i существуют натуральное число N_i и мероморфная функция B_i, такие что значение функции $N_i\rho_i$ в точке $x \in P$ равно вычету в этой точке функции $\frac{dB_i}{B_i}$. Отсюда следует, что форма $\sum \frac{\mu_i}{N_i}\frac{dB_i}{B_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α. □

Итак, согласно доказанному условию задача 2 разрешима, если и только если любой дивизор из конечного числа явно построенных дивизоров степени нуль после умножения на подходящее целое число становится главным. Теорема Абеля доставляет описание главных дивизоров. Поэтому вопрос о разрешимости задачи 2 в принципе сводится к теореме Абеля.

Замечание. Является ли явно заданный дивизор на алгебраической кривой главным или почти главным? Этот вопрос может оказаться непростым, так как теорема Абеля неконструктивна (ср. [17]). Абель столкнулся с этой проблемой в своей работе об интегрируемости в элементарных функциях псевдогиперэллиптических интегралов. Работа Абеля была закончена Золотарёвым (см. [53]).

Пример 1. Пусть W — кривая рода один. Фиксируем структуру алгебраической абелевой группы на W, задав точку $* \in W$, являющуюся нулевым элементом группы. Рассмотрим всюду плотное множество F на кривой W, состоящее из элементов конечного порядка группы W. *Задача 2 разрешима для любой формы α, для которой множество P содержится в F.*

Обсудим противоположную ситуацию. Скажем, что конечное множество F на кривой положительного рода является *общим подмножеством*, если не существует ни одного ненулевого главного дивизора D, носитель которого лежит в множестве F. Из теоремы Абеля видно, что среди подмножеств с фиксированным числом точек на кривой положительного рода множество общих подмножеств имеет полную меру.

Пример 2. Пусть W — кривая положительного рода и F — общее подмножество на ней. *Задача 2 неразрешима для любой формы α, для которой множество P непусто и содержится в F.*

6.3. Элементарность и неэлементарность абелевых интегралов. Вопрос об элементарности интеграла алгебраической функции сводится к задачам 1 и 2 (см. п. 6.1, 6.2).

Теорема 6.9. *Первообразная мероморфной формы α обобщенно-элементарна, если и только если для формы α разрешимы задачи* 1 *и* 2 *и форма α равна сумме решений этих задач, т. е. $\alpha=\beta+\gamma$, где β — решение задачи* 1 *для формы α и γ — решение задачи* 2 *для формы α.*

Доказательство. Если неопределенный интеграл от формы α является обобщенной элементарной функцией, то по теореме Лиувилля для формы α разрешимы задачи 1 и 2 и форма α равна сумме решений этих задач. В обратную сторону теорема очевидна. □

Следствие 6.10. *Пусть для мероморфной формы α на кривой положительного рода множество точек P, в которых вычет формы α не равен нулю, является общим подмножеством кривой. Тогда неопределенный интеграл от формы α не может быть обобщенной элементарной функцией.*

Пусть P — фиксированное конечное подмножество на компактной кривой W. Обозначим через $\overline{\Omega}_P$ пространство мероморфных 1-форм на кривой W, вычеты которых в каждой точке множества $W\setminus P$ равны нулю. *Каждая форма $\alpha\in\overline{\Omega}_P$ задает* следующий *класс одномерных когомологий $[\alpha]$ множества $W\setminus P$*: значение $[\alpha](\gamma)$ класса $[\alpha]$ на 1-цикле γ равняется $\int_{\bar\gamma}\alpha$, где $\bar\gamma$ — 1-цикл, не проходящий через полюсы формы α, гомологичный циклу γ в области $W\setminus P$. От выбора 1-цикла $\bar\gamma$ интеграл не зависит, так как по условию вычет формы α в каждом полюсе, лежащем в $W\setminus P$, равен нулю.

Пусть $D=(f)$ — главный дивизор на кривой W, носитель которого содержится в множестве P. С дивизором D связан целочисленный класс когомологий $[D]$ пространства $W\setminus P$, заданный 1-формой $\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}$ (функция f определяется дивизором D с точностью до константы, от выбора которой 1-форма не зависит). Обозначим через $L(P)$ комплексно-линейное подпространство в одномерных когомологиях дополнения $W\setminus P$ к множеству P, порожденное целочисленными классами $[D]$ главных дивизоров D, носители которых лежат в множестве P (такие дивизоры соответствуют точкам решетки $\bar J_0(P)$).

Теорема 6.11. *Первообразная мероморфной формы α на кривой W, принадлежащей пространству $\overline{\Omega}_P$, является обобщенной* *элементарной функцией, если и только если класс когомологий* $[\alpha]\in \in H^1(W\setminus P)$ *лежит в пространстве* $L(P)$.

Доказательство. Если класс $[\alpha]$ лежит в пространстве $L(P)$, то форма α на множестве $W\setminus P$ задает тот же класс когомологий, что и некоторая форма $\gamma=\sum\lambda_i\frac{dA_i}{A_i}$, где A_i — мероморфные функции, носители дивизоров которых лежит в множестве P. Форма $\beta=\alpha-\gamma$ задает нулевой класс когомологий на $W\setminus P$. Поэтому неопределенный интеграл формы β является однозначной функцией на $W\setminus P$. Этот интеграл имеет полиномиальный рост около полюсов формы β и является, следовательно, мероморфной функцией на кривой W. Обратное утверждение вытекает из теоремы Лиувилля. □

Приведем несколько следствий доказанных теорем. Прежде всего отметим следующее топологическое препятствие к элементарности интеграла алгебраической 1-формы.

Следствие 6.12. *Если на кривой* W *первообразная мероморфной формы* α, *принадлежащей пространству* $\overline{\Omega}_P$, *является обобщенной элементарной функцией, то умноженное на* $\frac{1}{2\pi i}$ *значение класса когомологий* $[\alpha]$ *на любом 1-цикле* $\gamma\in H_1(W\setminus P,\mathbb{Z})$ *лежит в пространстве* $V(\operatorname{res}\alpha)$.

Доказательство. Действительно, если интеграл формы α элементарен, то $\alpha=dA_0+\sum\lambda_i\frac{dA_i}{A_i}$ и числа λ_i лежат в пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Периоды формы dA_0 равны нулю, а периоды форм $\frac{1}{2\pi i}\frac{dA_i}{A_i}$ целочисленны. □

Следствие 6.13 (ср. [53]). *Если все вычеты мероморфной формы* α *на компактной римановой поверхности* W *равны нулю, то неопределенный интеграл от* α *берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он однозначен на* W.

Доказательство. Интеграл от мероморфной формы имеет полиномиальный рост около полюсов формы. Поэтому если интеграл однозначен, то он является мероморфной функцией. В другую сторону утверждение вытекает из предыдущего следствия. □

Следствие 6.14 (ср. [53]). *Интеграл от ненулевой голоморфной формы никогда не берется в обобщенных элементарных функциях. Например, эллиптический интеграл* $\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{\sqrt{P(t)}}$, *где* P — *кубический полином без кратных корней, не элементарен.*

Доказательство. Интеграл от голоморфной формы однозначен, если и только если она равна нулю. □

Утверждение 6.15. *Пусть форма α имеет полюсы не выше первого порядка и все ее вычеты рациональны. Тогда неопределенный интеграл формы α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если все периоды формы $\frac{1}{2\pi i}\alpha$ рациональны.*

Доказательство. Необходимость условия рациональности периодов вытекает из следствия 6.12 настоящего пункта. Проверим их достаточность. По условию для некоторого натурального числа N все периоды формы $\frac{N\alpha}{2\pi i}$ являются целыми числами. Поэтому функция F, определенная равенством $F(x) = \exp\int_{x_0}^{x} N\alpha$, является однозначной функцией на W. Функция F мероморфна, так как форма α имеет лишь полюсы первого порядка. Равенство $\int_{x_0}^{x}\alpha = \frac{1}{N}\ln F(x) + c$ доказывает нужное утверждение. □

Следствие 6.16. *Пусть все вычеты мероморфной формы α рациональны. Тогда неопределенный интеграл формы α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если для формы α разрешима задача* 1 *и все периоды формы $\frac{1}{2\pi i}\alpha$ рациональны.*

Доказательство. Так как для формы α задача 1 разрешима, существует мероморфная функция A_0, такая что форма $(\alpha - dA_0)$ имеет лишь полюсы 1-го порядка. Форма $(\alpha - dA_0)$ имеет те же периоды, что и форма α, и к ней применимо утверждение 6.15. □

§ 7. Критерий Лиувилля—Мордухай-Болтовского

Лиувиллю принадлежит первый результат о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений в явном виде (см. [29], [27]).

Теорема 7.1 (Лиувилля). *Уравнение $y'' + py' + qy = 0$ с коэффициентами из функционального дифференциального поля K, все элементы которого представимы в обобщенных квадратурах, решается в обобщенных квадратурах, если и только если оно имеет решение вида $y_1(x) = \exp\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где f — функция, удовлетворяющая алгебраическому уравнению с коэффициентами в поле K.*

В одну сторону теорема очевидна. Если известно одно решение y_1 линейного дифференциального уравнения второго порядка, то его можно решить, понизив порядок уравнения. Доказать теорему в другую сторону достаточно трудно.

Потребовалось более полувека, чтобы обобщить теорему Лиувилля на уравнения n-го порядка. Мордухай-Болтовский доказал в 1910 г. методом Лиувилля следующий критерий, позволяющий сводить вопрос о разрешимости уравнения к вопросу о разрешимости другого уравнения меньшего порядка.

Критерий Лиувилля—Мордухай-Болтовского. *Уравнение n-го порядка*

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0$$

с коэффициентами из функционального дифференциального поля K, все элементы которого представимы в обобщенных квадратурах, решается в обобщенных квадратурах, если и только если, во-первых, оно имеет решение вида $y_1(x)=\exp\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt$, где f — функция, лежащая в некотором алгебраическом расширении K_1 поля K, и, во-вторых, дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка на функцию $z=y'-\frac{y_1'}{y_1}y$ с коэффициентами из поля K_1, полученное из исходного уравнения процедурой понижения порядка (см. п. 1.2 главы 3), *решается в обобщенных квадратурах над полем K_1.*

В том же 1910 году появилась теорема Пикара—Вессио, в которой вопрос о разрешимости линейных дифференциальных уравнений решается абсолютно по-другому, с точки зрения дифференциальной теории Галуа.

В третьей главе мы обсудим основные положения этой теории. Критерий Лиувилля—Мордухай-Болтовского по существу эквивалентен теореме Пикара—Вессио. Теория Пикара—Вессио не только объясняет этот критерий, но и дает возможность довести его до явного алгоритма, позволяющего для уравнения с коэффициентами из поля рациональных функций (имеющих рациональные коэффициенты) определить, разрешимо уравнение в обобщенных квадратурах или нет (см. [33] и § 7 главы 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. научно-техн изд., 1939; М.: Факториал Пресс, 2005.

[2] В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Изд-во МЦНМО, 2001.

[3] В. И. Арнольд. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблема топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1970, Т. 4, вып. 3. С. 1–9.

[4] В. И. Арнольд, О. А. Олейник Топология действительных алгебраических многообразий // Вестник МГУ. Сер. 1, матем, механ. 1979, Т. 6. С. 7–17.

[5] В. И. Арнольд. Суперпозиции // А. Н. Колмогоров, Избранные труды, математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 444–451.

[6] В. И. Арнольд. Топологическое доказательство трансцендентности абелевых интегралов в «Математических началах натуральной философии» Ньютона // Историко-математические исследования. 1989, Т. 31. С. 7–17.

[7] V. I. Arnold, V. A. Vassiliev. Newton's *Principia* read 300 years later // Notices Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 36, № 9. P. 1148–1154. (Addendum: 1990. Vol. 37, № 2. P. 144).

[8] V. I. Arnold. Problémes rèsolubles et problémes irrèsolubles analytiques et gèomètriques // Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sèmiophysique et Intelligibilitè. Dèdiè á R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Èditions, 1994. P. 411–417.

[9] В. И. Арнольд. О некоторых задачах теории динамических систем // В. И. Арнольд — Избранное 60. М.: Фазис, 1997. С. 533–551.

[10] В. И. Арнольд. И. Г. Петровский. Топологические проблемы Гильберта и современная математика // Успехи матем. наук. 2002. Т. 157, вып. 4. С. 197–207.

[11] М. Берже. Геометрия: В 2 т. М.: Мир, 1984.

[12] А. А. Болибрух. Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 53–79.

[13] А. А. Болибрух. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: Изд-во МЦНМО, 2000.

[14] М. Горески, Р. Макферсон. Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.

[15] А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций М.: Наука, 1968.

[16] В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.–Л.: ГТТИ, 1950.

[17] Дж. Дэвенпорт. Интегрирование алгебраических функций. М.: Мир, 1985.
[18] Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованский. Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами. Препринт ИПМ АН СССР, № 117. М., 1974.
[19] И. Капланский. Введение в дифференциальную алгебру. М.: Мир, 1959.
[20] E. R. Kolchin. Algebraic matric groups and the Picard–Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations // Ann. of Math. 1948. Vol. 49. P. 1–42.
[21] E. R. Kolchin. Galois theory of differential fields // Amer. J. of Math. 1953. Vol. 75. P. 753–824.
[22] А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз, 1962.
[23] И. А. Лаппо-Данилевский. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ГТТИ, 1957.
[24] В. П. Лексин. О задаче Римана—Гильберта для аналитических семейств представлений // Матем. заметки. 1991. Т. 50, вып. 2. С. 89–97.
[25] J. Liouville. Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébriques // J. École Polytech. Paris. 1833. Vol. 14. P. 124–193.
[26] J. Liouville. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes // J. Reine Angew. Math. 1835. Vol. 13, № 2. P. 93–118.
[27] J. Liouville. Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites // J. Math. Pures Appl. Ser. I. 1839. Vol. IV. P. 423–456.
[28] В. В. Прасолов. Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций // Математическое просвещение. Третья серия. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. Вып. 7. С. 126–135.
[29] J. F. Ritt. Integration in finite terms. Liouville's theory of elementary methods. N. Y.: Columbia Univ. Press, 1948.
[30] M. Rosenlicht. Liouville's theorem of functions with elementary integrals // Pacific J. Math. 1968. Vol. 24. P. 153–161.
[31] M. Rosenlicht. On Liouville's theory elementary of functions // Pacific J. Math. 1976. Vol. 65, № 2. P. 485–492.
[32] M. F. Singer. Formal solutions of differential equations // J. Symbolic comput. 1990. Vol. 10. P. 59–94.
[33] M. F. Singer. Liouvillian solutions of n-th order homogeneous linear differential equations // Amer. J. of Math. 1981. Vol. 103, № 4. P. 661–682.
[34] M. van der Put, M. F. Singer. Galois theory of linear differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
[35] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
[36] Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1962.
[37] А. Г. Хованский. О представимости алгеброидных функций суперпози-

циями аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной // Функц. анал. и его прил. 1970. Т. 4, вып. 2. С. 74–79.
[38] А. Г. Хованский. О суперпозициях голоморфных функций с радикалами // Успехи матем. наук. 1971, Т. 26, вып. 2. С. 213–214.
[39] А. Г. Хованский. О представимости функций в квадратурах // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 251–252.
[40] А. Г. Хованский. О представимости функций в квадратурах. Дис. … канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 1973.
[41] A. Khovanskii. Topological obstructions for representability of functions by quadratures // Journal of dynamical and control systems. 1995. Vol. 1, № 1. P. 99–132.
[42] А. Г. Хованский. О продолжаемости многозначных аналитических функций на аналитическое подмножество // Функц. анал. и его прил. 2001. Т. 35, вып. 1. С. 62–73.
[43] А. Г. Хованский. О монодромии многозначной функции на ее множестве ветвления // Функц. анал. и его прил. 2003. Т. 37, вып. 2. С. 65–74.
[44] А. Г. Хованский. Многомерные результаты о непредставимости функций в квадратурах // Функц. анал. и его прил. 2003. Т. 37, вып. 4. С. 74–85.
[45] А. Г. Хованский. О разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59, вып. 4. С. 69–146.
[46] А. Г. Хованский, С. П. Чулков. Геометрия полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во МЦНМО, 2006.
[47] А. Г. Хованский. Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности. М.: Изд-во МЦНМО, 2007.
[48] А. Г. Хованский. Интерполяционные полиномы и их применения в чистой математике. М.: Изд-во МЦНМО (в печати).
[49] А. Г. Хованский, О. А. Гельфонд. О вещественных функциях Лиувилля // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 52–53.
[50] А. Г. Хованский. Малочлены. М.: Фазис, 1997.
[51] Н. Г. Чеботарев. Основы теории Галуа, 1. М.–Л.: ГТТИ, 1934
[52] Н. Г. Чеботарев. Основы теории Галуа, 2. М.–Л.: ГТТИ, 1937.
[53] Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций. М.–Л.: ГТТИ, 1948; М.: УРСС, 2007.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

В книге использованы шрифты
гарнитуры ITC Charter.

Аскольд Георгиевич Хованский

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА
РАЗРЕШИМОСТЬ И НЕРАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ
В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

Технический редактор *В. Ю. Радионов*
Корректор *О. А. Васильева*

Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
Тел. (495) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“»
121099, Москва, Шубинский пер., 6