Точки, лежащие на одной прямой

Цели урока:

1) Повысить математическую культуру учащихся, познакомив их с некоторыми красивыми теоремами планиметрии;

2) повысить мотивацию учащихся, продемонстрировав эстетическую ценность математики на примере нестандартных способов доказательств, связи планиметрии и стереометрии.

1. Организационный момент (2 минуты)

Домашнюю работу мы обсудим позже, так как она была разной у разных групп.

2. Мотивационный этап (15 минут)

Доминанта урока: три точки лежат на одной прямой. Вопрос классу: как доказывалось ранее, что три точки принадлежат одной прямой? С помощью подсчёта углов. Предлагается знакомая задача.

1) На сторонах квадрата $ABCD$ построили равносторонние треугольники AA_1D и BB_1A так, что точка A_1 оказалась внутри квадрата, а точка B_1 — снаружи. Докажите, что точки B_1, A_1, C лежат на одной прямой.

Ученики решают устно. Экранное решение, разбор.

Предлагается ситуация, когда такое способ решения не проходит. Показывается вводная вычислительная задача:

2) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно так, что $AK : KB = 2 : 3$ и $BL : LC = 3 : 1$. Точка M такова, что C — середина отрезка AM. Докажите, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

Способ решения, используемый в первой задаче, не приводит к успеху. Зато можно решить общую задачу и получить простой и важный критерий ***коллинеарности*** точек.

3. Актуализация знаний (8 минут)

Теорема о пропорциональных отрезках

Школьники вспоминают условие, условие записывается на доске и остаётся до конца урока. Частные случаи теоремы: «башенка» и «бантик».

4. Изучение нового материала (20 минут)

Теорема Менелая (прямая и обратная) На сторонах (или продолжениях сторон) AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что эти точки лежат на одной прямой. В этом, и только в этом случае выполнено равенство:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

Условие показано на экране. Положение точек изменяется, но отношение длин отрезков остаётся прежним. Доказательство (показывается на экране, школьники записывают в тетради).

5. Закрепление изученного материала, применение новых знаний (10 минут)

Решение задачи 2 (устно). Школьники решают задачу 3, сдают устно преподавателям.

3) На стороне BC равнобедренного ($AB = BC$) остроугольного треугольника ABC взята точка K так, что $AK = KB$. На луче KA за точку A выбрана точка T так, что $AT = AB$. Докажите, что прямая AB делит отрезок CT пополам.

6. Изучение нового материала (30 минут)

Теорема Дезарга Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ таковы, что A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в точке O. Пусть прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C, прямые B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке A, прямые C_1A_1 и C_2A_2 пересекаются в точке B, тогда точки A, B и C лежат на одной прямой.

Иллюстрация на экране, обсуждение условия, размышление над доказательством. Доказательство (показывается на экране, школьники записывают в тетради). Стереоэффект («выход в пространство»).

4) ***Теорема Ван-Обеля*** На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Докажите, что $\frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AO}{OA_1}$.

5) (Международная олимпиада, 1982 год) Даны два правильных треугольника: ABC и ABD. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что прямая PQ проходит через центр треугольника ABD. Известно, что отношения $AP : PB$ и $BQ : QC$ равны одному и тому же числу. Найдите это число.

6) На сторонах четырёхугольника $ABCD$ AB, BC, CD взяли точки E, F и G. CA и FE пересекаются в точке C_1, BD и FG пересекаются в точке B_1, C_1G и B_1E пересекаются в точке O. Докажите, что точка лежит на AD.

7) В шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения прямых BF и CE, AE и BD, AC и FD лежат на одной прямой.

8) Докажите второй случай теоремы Менелая (прямой и обратной): точки C_1, A_1 и B_1 выбраны на продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC соответственно.

9) На стороне AB треугольника ABC и продолжении его стороны BC за точку выбраны точки D и E соответственно так, что $AD : DB = 1 : 4$ и $EC : CB = 1 : 3$. В каком отношении прямая DE разделит сторону AC? А в каком отношении она разделит медиану AM треугольника ABC?

10) Выведите теорему Дезарга из теоремы, обратной ей.

11) Прочитайте в учебнике и разберите доказательство теоремы о пропорциональных отрезках.