17. Пропорциональные отрезки (17.12.2007)

Теорема Чевы: Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

1. Докажите прямое утверждение теоремы.

2. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка K — на стороне AC. Отрезки CM и BK пересекаются в точке P так, что $BM : MA = 5 : 3$, $AK : KC = 7 : 10$. Найдите, в каком отношении луч AP делит сторону BC.

3. Докажите обратное утверждение теоремы.

4. **а)** Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
б) Докажите, что прямые, проходящие через вершины и делящие периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.

5. На медиане AA_1 треугольника ABC взята произвольная точка M. Прямые BM и CM пересекают прямые CA и BA соответственно в точках B_1 и C_1. Докажите, что четырёхугольник BCB_1C_1 — трапеция.

6. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Докажите, что $ABCD$ — трапеция. (Точка Q расположена ближе к точке B, чем к A.)

7. Докажите, что если O — точка пересечения диагоналей трапеции, то $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB}$.

8. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K. Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M. Докажите, что $AK^2 = KL \cdot KM$.

9. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{p}$ и $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{q}$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1?