33. Теорема Карно и высоты треугольника (18.02.2008)

1. **а)** Из точки A опущен перпендикуляр с основанием H на прямую BC. Докажите, что $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$.
б) Докажите, что прямая AD перпендикулярна прямой BC тогда и только тогда, когда $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$.

2. Из точки M опущены перпендикуляры MP, MK, ME соответственно на стороны AB, BC и CA треугольника ABC. Докажите, что $AP^2 + BK^2 + CE^2 = BP^2 + CK^2 + AE^2$.

3. **Теорема Карно.**
а) Из точек A_1, B_1, C_1 опущены перпендикуляры соответственно на стороны BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что если эти перпендикуляры пересекаются в одной точке, то $A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2$.
б) Докажите обратное утверждение: если $A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2$, то перпендикуляры пересекаются в одной точке. *(Указание: Рассмотрите точку пересечения двух из этих перпендикуляров.)*

4. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

5. Перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника ABC на соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на соответствующие стороны треугольника ABC, также пересекаются в одной точке.

6. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и A_1B_1 перпендикулярны.

7. Докажите, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

8. Даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте (выходящей из прямого угла) на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.

---

33. Теорема Карно и высоты треугольника (18.02.2008)

1. **а)** Из точки A опущен перпендикуляр с основанием H на прямую BC. Докажите, что $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$.
б) Докажите, что прямая AD перпендикулярна прямой BC тогда и только тогда, когда $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$.

2. Из точки M опущены перпендикуляры MP, MK, ME соответственно на стороны AB, BC и CA треугольника ABC. Докажите, что $AP^2 + BK^2 + CE^2 = BP^2 + CK^2 + AE^2$.

3. **Теорема Карно.**
а) Из точек A_1, B_1, C_1 опущены перпендикуляры соответственно на стороны BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что если эти перпендикуляры пересекаются в одной точке, то $A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2$.
б) Докажите обратное утверждение: если $A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2$, то перпендикуляры пересекаются в одной точке. *(Указание: Рассмотрите точку пересечения двух из этих перпендикуляров.)*

4. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

5. Перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника ABC на соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на соответствующие стороны треугольника ABC, также пересекаются в одной точке.

6. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и A_1B_1 перпендикулярны.

7. Докажите, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

8. Даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте (выходящей из прямого угла) на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.
