

38. Вписанная и невписанная окружности треугольника (26.03.2008)

1. Докажите: биссектриса — это ГМТ равноудалённых от сторон угла (и лежащих внутри).
2. а) Докажите, что в любом треугольнике биссектрисы углов пересекаются в одной точке.
б) Докажите, что для любого треугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон и при этом, такая окружность только одна (вписанная окружность).
в) Докажите, что для любого треугольника существует окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других (невписанная окружность). Сколько таких окружностей у треугольника?
3. Из точки, лежащей вне окружности, к окружности провели две касательных. Докажите, что отрезки касательных, заключённых между данной точкой и точками касания, равны.
4. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольники ABD и ADC вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$.
5. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , BC и AC соответственно в точках K , M и N . Найдите угол KMN , если $\angle A = 70^\circ$.
6. В равнобедренный треугольник с основанием a вписана окружность и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна b . Найдите боковую сторону данного треугольника.
7. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1 , B_1 , C_1 , причём $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1 , B_1 , C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.
8. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается стороны BC в точке K , а невписанная — в точке L . Докажите, что $CK = BL = (a + b - c)/2$. ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.)
9. CD — медиана треугольника ABC . Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD , касаются отрезка CD в точках M и N . Найдите MN , если $AC - BC = 2$.