

39. Описанная окружность треугольника (31.03.2008)

1. а) Докажите, что серединный перпендикуляр, проведённый к отрезку, — ГМТ точек, равноудалённых от концов этого отрезка.
2. а) Докажите, что в любом треугольнике серединные перпендикуляры, проведённые к его сторонам, пересекаются в одной точке.
б) (Описанная окружность.) Докажите, что для любого треугольника существует окружность, проходящая через все его вершины, и при этом, такая окружность только одна.
3. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E . AD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = ED$.
4. а) O — центр описанной окружности треугольника ABC , AH — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.
б) Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите $\angle AIC$, где I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .
5. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых A_1A, B_1B, C_1C .
6. O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , S_A, S_B, S_C — окружности с центром O , касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что сумма трёх углов: между касательными к S_A , проведёнными из точки A , к S_B — из точки B и к S_C — из точки C , равна 180° .
7. а) В треугольнике из одной вершины провели биссектрису, медиану и высоту. Докажите, что биссектриса лежит между медианой и высотой.
б) В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины C , тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.
8. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1, CC_1 продлили до пересечения с описанной окружностью в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника ABC делит отрезок AA_0 пополам. Докажите, что треугольник $A_0B_0C_0$ равнобедренный.