Занятия 19 и 20 (19/11/2007 и 26/11/2007)
Малая теорема Ферма

4.30. Докажите, что если p – простое и a не делится на p, то среди чисел a, $2a$, $3a$, $\ldots$, $(p-1)a$ нет двух, дающих одинаковые остатки при делении на p.

4.31. ***(Малая теорема Ферма.)*** Докажите, что если p — простое и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

4.32. ***(Следствие.)*** Докажите, что если p – простое, то $a^p \equiv a \pmod{p}$ для любого целого a.

4.33. Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.

4.34. Найдите остаток от деления 3^{102} на 101.

4.35. Докажите, что $1^{100} + 2^{100} + \ldots + 100^{100} + 1 \; vdots$ 101.

4.36. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

4.37. Докажите, что если m и n – взаимно просты, то для любых целых a и b:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{mn}.$$

4.38. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

4.39. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.

4.40. Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

4.41. p – простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ для любых целых a и b.

4.42. p и q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

4.43. $p > 5$ – простое число. Докажите, что $\underbrace{1\ldots1}_{p-1} \,\vdots\, p$.

Занятие 20 (26/11/2007 и 01/12/2007)
Сравнения по модулю

4.44. Докажите, что для любого целого числа a, не кратного простому числу p, найдётся «парное» целое число b такое, что их произведение даёт остаток 1 при делении на p.

4.45. Найдите все такие целые a, которые являются «парными» сами себе.

4.46. Теорема Вильсона: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Теорема Вильсона сформулирована Эдуардом Ва́рингом в 1770 г., по его словам, принадлежала Дж. Ви́льсону, доказана Жозефом Луи Лагра́нжем в 1771 г. А вот МТФ, как ни странно, действительно доказана Пьером Ферма́ в 1640 г.

4.47. Найдите остаток от деления
а) $(2007 \cdot 2008 \cdot \ldots \cdot 2064)^{64}$ на 59; б) 10^{1923} на 97; в) $2^{197} \cdot 10^{393}$ на 197; г) 2168^{2001} на 197; д) 3^{40} на 83.

4.48. Докажите, что если $(a+b+c) \,\vdots\, 30$, то $(a^5+b^5+c^5) \,\vdots\, 30$.

4.59. Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Докажите, что $\left[\frac{p^q+q^p}{pq}\right]$ — чётное число. ($[x]$ — целая часть x.)