Занятие 28 (12/01/2008)
Множества и операции

Пусть X — некоторое *множество*, а x — *элемент* этого множества. Принадлежность элемента множеству будем обозначать $x \in X$. Множество, которое не содержит никаких элементов (*пустое*), будем обозначать $\varnothing$. Заметим, что $\forall A \quad \varnothing \subset A$ (любое множество содержит в себе пустое множество). Примеры множеств: $\{1, 2, 3\}$; $\{x | P(x)\}$ — множество всех элементов x, обладающих свойством $P(x)$.

Определение Два множества *равны*, если содержат одни и те же элементы (все элементы первого являются элементами второго, и наоборот). Заметим, что множества $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$ и $\{2, 2, 1, 1, 3, 3, 3\}$ равны, т. е. порядок записи элементов не учитывается, и все элементы учитываются по одному разу.

Определение $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \Rightarrow x \in B$ (Множество A содержится в B, если и только если любой элемент, принадлежащий множеству A, принадлежит и множеству B.) Например, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

5.1. Докажите, что $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$.

5.2. Сколько различных подмножеств имеет множество из пяти элементов?

5.3. Укажите все пары «подмножество-множество» среди следующих множеств: целые числа, делящиеся на 1) 2; 2) 3; 3) 6; 4) 4; 5) 9; 6) 12; 7) 18.

Определение Основные операции с множествами:

1. Пересечение $\quad A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\}$
2. Объединение $\quad A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}$
3. Разность $\quad A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\}$
4. Симметрическая разность $\quad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

5.4. Пусть A и B — пересекающиеся круги на плоскости. Заштрихуйте на рисунке $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$.

5.5. Какие два множества в зад. 3 в пересечении дают множество из этой же задачи?

5.6. Проверьте следующие свойства:

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap A = A; \quad A \cup A = A;$$
$$A \cap (B \cap C) = C \cap (A \cap B); \qquad A \cup (B \cup C) = C \cup (A \cup B);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C; \qquad (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C).$$

5.7. Из пятнадцати преподавателей летней школы восемь делать зарядку не хотели, а шесть не умели. Из тех, кто не умели, половина не хотели. Сколько преподавателей делали зарядку в летней школе?

5.8. Докажите, что

а) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

б) $\max(m, n) = m + n - \min(m, n)$ для любых m и n;

в) $\text{НОК}(m, n) = \frac{mn}{\text{НОД}(m,n)}$ для любых натуральных m и n.

5.9. Часть детей, набираемых в маткласс, ходила на Малый мехмат (M), 11 человек ездили на матбой в Петербург (P), 20 школьников сдавали вступительные экзамены (E). Четверо маломехматян ездили в Петербург, 14 маломехматян сдавали экзамены. Из тех, кто играл в матбой, экзамены сдавали 8, а трое успели везде. Сколько детей не ходили на малый мехмат и не играли в матбой, если всего в классе 25 человек, и каждый в чём-нибудь участвовал?

Напишите, сколько элементов во множестве:

1) $P \cap E \cup M$;

2) $P \triangle M$;

3) $E \setminus (P \cap E) \cup M$.

5.10. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 1000 таких, что они не делятся ни на 3, ни на 7, ни на 11?

5.11. Сколько существует шестизначных номеров телефонов, сумма цифр которых не делится на 6?

5.12. Верны ли равенства:

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \cap B) \setminus C;$$
$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A \cup B?$$

5.13. Упростите выражения: $A \triangle (B \triangle A)$;

$$(A \cap C) \setminus (B \cup C); \qquad (A \cup C) \cap (B \setminus A);$$
$$((A \setminus B) \setminus C) \cap (D \setminus A); \qquad (A \cap B) \cup (C \setminus A) \cap (B \setminus C).$$

5.14. Сколько подмножеств у множества $\{1, 2, \ldots, n\}$?