

# Занятия 29 и 32 (14/01/2008 и 26/01/2008)

## Множества и отображения

**Определение** Отображение — это сопоставление каждому элементу одного множества ровно одного элемента другого множества. Если элемент  $x$  множества  $X$  переходит в элемент  $y$  множества  $Y$ , то  $x$  называется прообразом элемента  $y$ , а  $y$  — образом элемента  $x$ .

Например, отображением множества всех действительных чисел во множество всех действительных чисел будет функция  $f(x) = kx + b$ . Если написать для каждого ученика 8«В» класса номер его квартиры, можно считать, что построено отображение множества учеников 8«В» класса во множество натуральных чисел. Для каждого ученика номер его квартиры будет образом, а для каждого натурального числа  $n$  все школьники из 8«В», у которых номер квартиры  $n$ , будут прообразами.

**Определение** Пусть есть отображение  $f : X \rightarrow Y$ . Обратным отображением  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  называется такое отображение, при котором каждой точке множества  $Y$  сопоставляется её прообраз при отображении  $f$ .

Заметим, что обратное отображение существует только тогда, когда у каждого элемента множества  $Y$  есть прообраз, или, другими словами, в каждый элемент что-то переходит. В общем случае мы можем построить несколько обратных отображений. Рассмотрим особый вид отображений, при которых обратное отображение существует и единственно:

**Определение** Взаимно однозначное соответствие множеств  $A$  и  $B$  — это отображение множества  $A$  в  $B$ , при котором у каждого элемента множества  $B$  есть прообраз, и притом только один.

Легко показать, что  $f^{-1}$  существует и единственно тогда и только тогда, когда отображение  $f$  является взаимно однозначным соответствием.

Пусть у нас есть отображение  $f : X \rightarrow Y$ , и пусть существует обратное отображение. Тогда выполнено  $f(f^{-1}(y)) = y$ . Если же  $f$  является взаимно однозначным соответствием, то выполнено также и  $f^{-1}(f(x)) = x$ . В общем случае второе равенство неверно (приведите пример).

**5.15.** На окружности выбрано 100 точек. Докажите, что число 57-угольников с вершинами в этих точках равно числу 43-угольников с вершинами в этих точках.

**5.16.** Докажите, что число последовательностей из нулей и единиц длины 100, в которых число единиц чётно, равно числу последовательностей из нулей и единиц длины 100, в которых число единиц нечётно.

**5.17.** Докажите, что число способов разрезать  $n$ -угольник на треугольники, проведя непересекающиеся диагонали, равно числу способов расстановок скобок в произведении  $n - 1$  сомножителя (без изменения их порядка). Например, пятиугольник можно разрезать на треугольники пятью способами, и в произведении  $abcd$  есть пять расстановок скобок:  $(ab)(cd)$ ,  $(a(bc))d$ ,  $((ab)c)d$ ,  $a((bc)d)$ ,  $a(b(cd))$ .

Указание: сомножители можно писать на сторонах, а произведения на диагоналях.

**5.18.** В гостинице бесконечное число мест, и все заняты. Приехал Александр Вячеславович. Можно ли ему найти место?

**5.19.** Есть две гостиницы с бесконечным числом мест, и все места заняты. В одной случился пожар. Можно ли всех её постояльцев переселить в другую?

**5.20.** Можно ли построить соответствие между множеством натуральных чисел и множеством  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ?

**5.21.** Можно ли построить соответствие между множествами  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$ ?

**5.22.** Обозначим  $[a]$  — множество  $\{1, 2, \dots, a\}$ . Сколько существует отображений из  $[a]$  в  $[b]$ ?

**5.23.** Существует ли обратное отображение  $f^{-1}$ , если

- 1)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + 1$ ;
- 2)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n + 1$ ;
- 3)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, f(n) = |n|$ ?

**5.24.** Рассмотрим отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ . Является ли оно соответствием? А для каких множеств это отображение будет соответствием? Найдите формулу для  $f^{-1}$ .

**5.25.** Рассмотрим отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = kx + b$ . Является ли оно взаимно однозначным соответствием? Найдите формулу для  $f^{-1}$ .