Занятие 33 (28/01/2008)
Множества и отображения

5.26. f отображает множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в себя по следующему правилу: $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 5$, $5 \to 2$. Найдите

1) f^2, f^3, f^4, f^5;

2) обратное отображение f^{-1};

3) f^k.

Определение Пусть есть отображение $f:\ X \longrightarrow Y$. Образом множества $A \subset X$ называется множество $f(A) \subset Y$, в которое при отображении переходят все элементы A. Прообразом множества $B \subset Y$ называется множество $f^{-1}(B) \subset X$, которое состоит из всех прообразов всех элементов множества B.

5.27. Докажите следующие свойства (используя определение):

1) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subset f(B)$;

2) $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$;

3) $f(A \cup B) = (f(A) \cup f(B))$;

4) Пусть $C,\ D \subset Y$. Д-те, что $C \subset D \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

5.28. Постройте взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, если

1) $A = \mathbb{N}$, B — множество всех чётных чисел;

2) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$;

3) $A = \mathbb{N}$, B — все точки плоскости с целыми координатами;

4) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$;

5) A — отрезок $[0; 1]$, B — отрезок $[2; 4]$;

6) A — все точки прямой, B — точки полуокружности, кроме двух крайних;

7) A — отрезок $[0, 1]$, B — полуинтервал $(0, 1]$;

8) A — все точки прямой, B — все точки полуокружности;

9) A — множество всех подмножеств натурального ряда, B — множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц.

5.29. Любая кучка людей организует тайное общество. ($\varnothing$ — тайное общество, всё множество людей — тоже тайное множество, и множество всех людей может быть бесконечно.) Каждый человек доносит ровно на одно общество. ЦРУ прикрывает общество, если на него донесли. Сможет ли ЦРУ прикрыть все тайные общества?

Назовём человека непорядочным, если он доносит на общество, членом которого является, и порядочным в противном случае.

1) Докажите, что если все люди непорядочные, то ЦРУ не сможет прикрыть все общества.

2) Предположим, что есть порядочные люди. Докажите, что на общество, состоящее из всех порядочных людей, никто не сможет донести.