Занятие 35 (04/02/2008)
Мощности множеств.

Теорема 1. ***(Теорема Кантора)*** *Нельзя построить взаимно однозначное соответствие между некоторым множеством и множеством всех его подмножеств.*

♢ ♦

Доказательство теоремы. Пусть X — некоторое множество, и $D(X)$ — множество всех его подмножеств. Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие $f:\ X \longrightarrow D(X)$.

Пусть $G = \{x|x \in X, x \notin f(x)\}$. Тогда, согласно пункту 1), $G \neq \varnothing$ (В терминах задачи G — общество порядочных людей, X — множество всех людей, $D(X)$ — множество всех тайных обществ.)

Так как G — некоторое подмножество X, то $G \subset D(X)$. Рассмотрим, какой элемент переходит в G. Пусть x_g такой, что $f(x_g) = G$. Тогда по определению множества G $x_g \notin G$. А поскольку $x_g \notin G$, то $x_g \in f(x_g)$. Но $f(x_g) = G$. Противоречие.

Определение Инъективным отображением (*инъекцией*) называется такое отображение множества X во множество Y, при котором у каждого элемента множества Y есть не более одного прообраза. Другими словами, разные элементы переходят в разные.

Определение Сюръективным отображением (*сюръекцией*) называется такое отображение множества X во множество Y, при котором у каждого элемента множества Y есть не менее одного прообраза. Другими словами, в каждый элемент что-то переходит.

Заметим, что обратное отображение f^{-1} существует тогда и только тогда, когда отображение f является сюръекцией. И обратное отображение единственно (если он существует) тогда и только тогда, когда f является инъекцией. Взаимно однозначное соответствие по определению есть сюръекция и инъекция одновременно.

Определение Множество A называется меньше либо равным по мощности множеству B, если существует инъекция из A в B.

Определение Множества A и B называются равномощными, если существует взаимно однозначное соответствие между A и B.

Мы выяснили, что равномощны $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$. Тогда, очевидно, равномощны $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. В самом деле, пусть есть взаимно однозначное соответствие $f:\ N \longrightarrow Z$ и взаимно однозначное соответствие $g:\ Z \longrightarrow Q$, то легко проверить, что отображение $h:\ N \longrightarrow Q$, получаемое следующим образом: $h(x) = g(f(x))$, тоже будет взаимно однозначным соответствием.

Так как множество $\mathbb{N}$ является подмножеством всех действительных чисел, то существует инъекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$. (Например, инъекцией является тождественное отображение.) Значит, можно утверждать, что мощность $\mathbb{N}$ меньше либо равна мощности $\mathbb{R}$. На самом деле, эти множества не являются равномощными, т.е. мощность множества натуральных чисел строго меньше мощности множества действительных чисел.

В терминах мощностей теорема Кантора утверждает, что для множества любой мощности существует множество большей мощности (в частности, множество всех его подмножеств).

Верно ли, что если множество A меньше либо равно по мощности множеству B, а множество B меньше либо равно по мощности множеству A, то эти множества равномощны? Казалось бы, должно быть верно. Иначе зачем нужно такое определение? Однако определение — всего лишь несколько слов. Представим ситуацию: мальчик Петя называет некоторые дни хорошими, а некоторые нехорошими. Может ли день быть одновременно хорошим и нехорошим? Казалось бы, нет. А принцип Пети таков: если в этот день был дождь, то этот день нехороший, а если в этот день он получил пятёрку, то день хороший. В этом случае, либо дни бывают одновременно хорошими и нехорошими, либо Петя не получает пятёрок вообще, поскольку дожди бывают, это-то мы точно знаем. То есть само по себе название ещё не даёт право тому, что мы так назвали, удовлетворят свойствам, которые в нашем определении отсутствуют. Но определение равномощности дейтствительно *корректно*, и это доказывает теорема Кантора-Берштейна:

Теорема 2. ***(Теорема Кантора-Берштейна)*** *Если множество A меньше либо равно по мощности множеству B, а множество B меньше либо равно по мощности множеству A, то эти множества равномощны.*

$\Diamond$ $\blacklozenge$

Доказательство этой теоремы мы здесь приводить не будем.

5.30. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц равномощно множеству всех чисел на отрезке $[0; 1]$.

1) Постройте инъекцию из множества всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц в $[0; 1]$.

2) Постройте инъекцию из $[0; 1]$ во множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

Указание: каждая цифра от 0 до 9 представляется не более чем четырёхзначным числом в двоичной системе счисления.

5.31. Докажите, что множество $\mathbb{N}$ строго меньше по мощности, чем множество чисел на отрезке $[0; 1]$.

5.32. Докажите, что $\mathbb{R}$ равномощно множеству всех чисел на отрезке $[0; 1]$.

Определение Мощностью конечного множества называется количество его элементов. Говорят, что множество является *счетным*, если оно равномощно натуральному ряду. Говорят, что множество имеет *мощность континуума*, если оно равномощно множеству действительных чисел.

Заметим, что мощность счетного множества больше мощности любого конечного множества, мощность континуума больше мощности счетного множества, а по теореме Кантора существуют множества, мощность которых больше мощности континуума. Множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ являются счетными, а окружность, отрезок, прямая — континуальными.