Занятие 38 (18/02/2008)
Конструкции: принцип узких мест

Узкое место *— это та часть конструкции, где свобода выбора — наименьшая. От узкого места быстрее дойти до противоречия или легче построить заметный кусок возможной конструкции.*

Ищи главное препятствие

Кто нам мешает, тот нам поможет..

7.1. Можно ли разрезать квадрат на равнобедренные треугольники с углом 80 между равными сторонами?

7.2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось составить некоторый прямоугольник из нескольких подобных между собой непрямоугольных треугольников. Можно ли ему верить?

7.3. На бесконечном листе клетчатой бумаги играют двое, ходят по очереди. Своим ходом можно выбрать любую незакрашенную сторону клетки и покрасить ее в любой цвет (число цветов неограничено). Первый выигрывает, если после его хода образуется замкнутая ломаная, где все звенья окрашены в разные цвета. Может ли второй ему помешать?

Узкие места — в первую очередь (принцип крайнего)

Век свободы не видать!

7.4. 20 детей разбили на пары мальчик-девочка, где мальчик выше девочки. После этого их разбили на пары мальчик-девочка по-другому.
а) Может ли оказаться, что теперь, наоборот, во всех парах девочка выше мальчика?
б) Оказалось, что теперь в 9 парах из 10 девочка выше мальчика. На каких местах окажутся девочки, если детей построить по росту?

7.5. Шахматная доска разбита на двуклеточные прямоугольники-домино. Докажите, что найдется пара домино, образующая квадрат из 4 клеток.

7.6. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?
б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

Подсчет узких мест (раскраска и принцип Дирихле)

Каждому пассажиру — по мягкому месту (девиз железнодорожников)

7.7. Дан правильный треугольник. Сколько нужно меньших правильных треугольников, чтобы его покрыть?

7.8. а) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу — белые, вверху — черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. Докажите, что за 102 хода нельзя поменять местами черные фишки с белыми.
б) За какое наименьшее число ходов можно добиться, чтобы все черные фишки поменялись местами с белыми?

7.9. На какое наибольшее число натуральных слагаемых можно разложить число 99 так, чтобы все слагаемые были больше 1 и попарно взаимно просты?

Домашнее задание

7.10. Можно ли в клетчатой таблице 13×13 отметить некоторые клетки так, чтобы любая клетка (как отмеченная, так и не отмеченная) граничила по стороне ровно с одной из отмеченных клеток?

7.11. Можно ли разрезать какой-нибудь треугольник на четыре выпуклые фигуры: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?

7.12. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности было одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа. Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема - вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 15 раз.

7.13. На доске 4×4 расставляются 16 шахматных коней четырех мастей: вороные, соловые, гнедые и каурые. Существует ли такая расстановка коней, в которой вороные не бьют соловых, соловые — гнедых, гнедые — каурых, а каурые — вороных?

7.14. Можно ли поверхность куба оклеить без пропусков и наложений тремя треугольниками?