

Занятие 49 (19/04/2008)

Графы

Определение Графом называется множество точек (*вершин*), некоторые из которых соединены линиями (*рёбрами*).

Одному и тому же графу может соответствовать несколько изображений. Например, в задаче о шахматном коне на доске 3×3 можно было нарисовать «звёздочку» с точкой, а можно было нарисовать «кольцо» с точкой. Важно лишь, какие вершины с какими соединены, а какие нет.

Граф можно задать картинкой, а можно *матрицей смежности*. Матрица смежности — это таблица, в которой по горизонтали и вертикали написаны номера вершин, а в пересечении столбца и строки стоит число, равное количеству рёбер между соответствующими вершинами.

8.15. Нарисуйте матрицы смежности к графам в задаче 8.4.

Пусть в графе две вершины соединены более чем одним ребром. В этом случае рёбра, соединяющие такие вершины, называются *кратными*. Если вершина соединена ребром сама с собой, то это ребро называется *петлёй*. Петли и кратные рёбра могут возникнуть, например, когда мы составляем граф дорог какого-нибудь города. Если в графе нет петель, то на главной диагонали матрицы смежности будут стоять нули. А если в графе нет кратных рёбер, то во всей матрице смежности будут только нули и единицы.

8.16. Существует ли граф, степени вершин в котором равны а) 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1; б) 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1? А если без петель и кратных рёбер?

8.17. Существует ли граф, степени вершин в котором равны а) 6, 3, 2, 2, 2, 1, 0; б) 6, 5, 4, 2, 2, 2, 1, 1?

8.18. Может ли в графе, в котором каждая вершина имеет степень 3, быть ровно 100 вершин? А 100 рёбер?

Определение Граф, в котором из любой вершины можно по рёбрам дойти до любой другой, называется *связным*.

8.19. В графе 15 вершин, и степень каждой вершины больше семи. Докажите, что граф связный.

8.20. В графе 100 вершин имеют степень 10, одна вершина имеет степень 13, и одна вершина имеет степень 1. Докажите, что граф связный.

Занятие 51 (12/05/2008)

Графы

Определение Деревом называется связный граф без циклов.

Определение Висячей называется вершина степени 1.

8.21. Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.

8.22. Докажите, что если в дереве есть вершина степени n , то в нём по крайней мере n висячих вершин.

8.23. Докажите, что из связного графа можно выкинуть вершину со всеми выходящими из неё рёбрами так, что граф останется связным, если а) исходный граф — дерево; б) исходный граф — произвольный.

8.24. Докажите, что в дереве $V - P = 1$, где V — количество вершин, P — количество рёбер.

Определение Плоским графом называется граф, нарисованный на плоскости без самопересечений.

Не любой граф можно нарисовать на плоскости.

Один и тот же граф иногда можно нарисовать существенно разными способами.

Определение Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без самопересечений.

8.25. Нарисуйте на плоскости а) полный граф из 4-х вершин; б) граф, образованный вершинами и ребрами куба.

Определение Гранью плоского графа называется связная часть плоскости, ограниченная рёбрами графа.

8.26. Докажите неравенство $3\Gamma \leq 2P$, где Γ — количество граней, а P — количество рёбер плоского графа.

8.27. Докажите **формулу Эйлера**: если есть связный плоский граф и V — количество вершин, P — количество рёбер, а Γ — количество граней в нём, то

$$V - P + \Gamma = 2.$$

8.28. Докажите, что для любого плоского графа выполнено неравенство $P \leq 3V - 6$.

8.29. Задача про футбольный мяч: В графе все грани — либо пяти-, либо шестиугольники, причём в каждой вершине сходится ровно три ребра. Докажите, что пятиугольников двенадцать.

8.30. Докажите, что полный граф из пяти вершин не является планарным.

8.31. В деревне три домика и три колодца. Из каждого домика к каждому колодцу ведёт тропинка. Докажите, что тропинки где-то пересекаются.