Осевая и центральная симметрия.

Геометрические преобразования.

В школьном курсе алгебры рассматриваются числовые функции. Но математика изучает *отображения* множеств различной природы, а не только числовых. Примеры отображений:

1. С помощью системы координат можно установить соответствие между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар чисел.
2. В соответствие каждому отрезку ставится число – его длина.

Заметим, что в первом примере не только каждой точке плоскости соответствует ровно одна упорядоченная пара чисел, но и каждой паре чисел соответствует ровно одна точка. Такое отображение называют *взаимно-однозначным*, или биекцией. Взаимно-однозначные отображения обратимы. (Какое отображение обратно данному?)

Отображение в примере 2 не является взаимно-однозначным по двум причинам. Во-первых, не каждому числу соответствует хотя бы один отрезок. Эту беду легко устранить, если рассматривать только положительные числа. Во-вторых, каждому положительному числу соответствует отнюдь не один отрезок. Поэтому отображения, обратного данному, не существует.

Приведите свои примеры отображений, область определения и/или значения которых не являются числовыми. Обратимы ли они?

Определение. ***Геометрическое преобразование*** *(или преобразование плоскости) – это отображение плоскости в себя.*

Примеры:

1. Тождественное преобразование оставляет все точки на своих местах.
2. Перенесем все точки плоскости на 5 см в одном и том же направлении.
3. Выберем точку О и оставим ее на месте, а остальные точки приблизим к точке О в 2 раза.
4. Выберем прямую a, оставим ее точки на месте, а все остальные «уроним» (спроектируем) на прямую a.
5. Отобразим все точки плоскости в одну и ту же точку О.

Какие из перечисленных отображений являются взаимно-однозначными? А какие сохраняют расстояние между точками?

Движения и равенство фигур.

Определение. *Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, называется* ***движением.***

Свойства движений.

Свойство 1. *Если точка B лежит между точками A и C, и при движении точки A, B, C переходят в точки A_1, B_1, C_1, то точка B_1 лежит между A_1 и C_1. (Т. е. движение сохраняет отношение «лежать между».)*

Свойство 2. *При движении отрезок переходит в отрезок, луч – в луч, прямая – в прямую, треугольник – в треугольник, окружность – в окружность, круг – в круг.*

Свойство 3. *Движение сохраняет величины углов.*

Свойство 4. *Движение сохраняет параллельность прямых.*

Свойство 5. *Движение является биекцией. Как и любая биекция, движение обратимо. Обратное ему преобразование также является движением.*

Определение. *Две* ***фигуры*** *называются* ***равными****, если существует движение, переводящее одну из них в другую.*

Простейшим примером движения является тождественное преобразование. Познакомимся еще с двумя видами движений.

Центральная симметрия.

Определение. *Точки A и B называются* ***симметричными относительно точки O****, если O является серединой отрезка AB. Точка O симметрична сама себе.*

Определение. ***Центральной симметрией*** *Z_O с центром O называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно точки O.*

Как можно задать центральную симметрию? Как построить образ данной точки, прямой, окружности?

Теорема. *Центральная симметрия является движением.*

Какое движение обратно центральной симметрии?

Точка (прямая), переходящая при данном движении в себя, называется *неподвижной* или *инвариантной.* Какие точки неподвижны при центральной симметрии? А какие прямые?

Теорема. *Центрально симметричные прямые параллельны.*

Если при центральной симметрии с центром O фигура переходит сама в себя, то она называется *симметричной относительно центра* O, а точка O называется ее *центром симметрии*.

Есть ли центр симметрии (сколько? где именно?) у отрезка, луча, прямой, угла, окружности, треугольника?

Осевая симметрия.

Определение. *Точки A и B называются* ***симметричными относительно прямой*** *l, если прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Точки прямой l симметричны сами себе.*

Определение. ***Осевой симметрией*** *S_l с осью l называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно прямой l.*

Как можно задать осевую симметрию? Как построить образ данной точки, прямой, окружности?

Теорема. *Осевая симметрия является движением.*

Какое движение обратно осевой симметрии? Какие точки неподвижны при осевой симметрии? А какие прямые?

Если при осевой симметрии с осью l фигура переходит сама в себя, то она называется *симметричной относительно оси l,* а прямая l называется ее *осью симметрии*.

Есть ли ось симметрии (сколько? где именно?) у отрезка, луча, прямой, угла, окружности, треугольника?

Задачи

1. Отрезки A_1B_1 и A_2B_2 имеют общую середину O. Докажите, что середины отрезков A_1A_2 и B_1B_2 лежат на одной прямой с точкой O.
2. а) Пользуясь только циркулем, постройте точку, симметричную данной, относительно данной прямой. б) Как, пользуясь только циркулем, проверить, лежат ли три данные точки на одной прямой?
3. Две прямые параллельны. Докажите, что они центрально-симметричны. Как выбрать центр симметрии? Единственный ли он?
4. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, проведенными параллельно сторонам, равны.

Некоторые идеи решения задач с помощью движений

- Доказательство равенства отрезков и углов по определению.
- Теорема об образе пересечения: *Образ пересечения двух фигур есть пересечение их образов.*
- Неподвижные точки и фигуры. В частности, *если при осевой симметрии точка неподвижна, то она принадлежит оси симметрии*.

Домашнее задание

1. Фигура состоит из 10 точек. а) Сколько существует отображений этой фигуры в себя? б) Сколько среди них обратимых?
2. Постройте фигуру, являющуюся объединением трех окружностей и имеющую ровно а) одну; б) две; в) три; г) бесконечно много осей симметрии.
3. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.
4. Докажите, что если противоположные стороны шестиугольника попарно равны и параллельны, то его диагонали пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения пополам.
5. Точки M и N – середины равных сторон AD и BC четырехугольника ABCD. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P.