

Описанный четырехугольник

Определение Четырехугольник, в который можно вписать окружность, называется **описанным**.

Критерии описанности четырехугольника

- 1) В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда биссектрисы трех его углов пересекаются в одной точке.
- 2) В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны между собой.

1. Определите вид параллелограмма, в который можно вписать окружность.
2. Окружность вписана в равнобокую трапецию. Докажите, что боковая сторона трапеции равна ее средней линии.
3. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

Определение Четырехугольник, имеющий две пары равных смежных сторон, называется **дельтоидом**.

4. а) Всегда ли в дельтоид можно вписать окружность?
б) Докажите, что одна из диагоналей дельтоида является его осью симметрии.
5. Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

Домашнее задание

6. Докажите, что в описанном четырехугольнике равны суммы углов, под которыми видны из центра вписанной окружности противоположные стороны.
7. Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.
8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M , а углов C и D – в точке N . Докажите, что $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.
9. Диагональ BD невыпуклого четырехугольника $ABCD$ расположена вне его. Продолжение стороны DC пересекает сторону AB в точке B_1 . Продолжение стороны BC пересекает сторону AD в точке D_1 . Докажите, что если четырехугольник AB_1CD_1 описанный, то:
а) суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны; б) $BB_1 + DB_1 = DD_1 + BD_1$.
10. В выпуклом четырехугольнике проведена диагональ AC . Окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC касаются ее в точках M и N соответственно.
а) Докажите, что $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.
б) Докажите, что точки M и N совпадают тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ описанный.

Снова вписанная и невписанная окружность

1. а) Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c , вычисляется по формуле $r = (a + b - c) / 2$.
б) Выведите аналогичные формулы для радиусов трех невписанных окружностей прямоугольного треугольника.
2. На сторонах AB , AC и BC треугольника ABC отмечены такие точки C_1 , B_1 , A_1 , что $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$, $CB_1 = CA_1$. Докажите, что A_1 , B_1 , C_1 – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Верна ли соответствующая теорема для описанного четырехугольника? А для описанного пятиугольника?
3. На стороне BC , и продолжениях сторон AC и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно таким образом, что $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1$. а) Верно ли, что A_1 , B_1 и C_1 – точки касания невписанной окружности? б) а если добавить требование $AC_1 = AB_1$?
4. Существует ли 2008-угольник со сторонами $1, 2, 3, \dots, 2002, 2008$ (именно в таком порядке), в который можно вписать окружность?

Домашнее задание

5. Дан прямоугольный треугольник. Радиус вписанной окружности равен 2, а радиус невписанной окружности, касающейся гипотенузы, равен 5. Найдите длину гипотенузы.
6. Постройте треугольник по центрам трех его невписанных окружностей.
7. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 , A_1 соответственно. Определите углы треугольника $A_1B_1C_1$ по углам треугольника ABC .
8. Окружность, построенная на основании BC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины ее диагоналей AC и BD и касается основания AD . Найдите углы трапеции.
9. Докажите, что если радиус вписанной окружности треугольника $r = (a + b - c) / 2$, где a , b и c – длины сторон треугольника, то треугольник прямоугольный.