

Пропорциональные отрезки

Лемма о башенке. Пусть на стороне OA треугольника OAB отмечена точка C , а на стороне OB – точка D , причем прямые AB и CD параллельны. Тогда $AB/CD = OA/OC$.

Лемма о бантике. Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке O , причем $AB \parallel CD$. Тогда $AB/CD = OA/OC$.

1. На стороне OA треугольника OAB отмечена точка C , а на стороне OB – точка D , причем прямые AB и CD параллельны. Прямая, проходящая через точку O , пересекает прямую AB в точке M , а прямую CD в точке K . Докажите, что $CK : KD = AM : MB$.
2. На основании AD трапеции $ABCD$ взяты точки K и L так, что $AK = LD$. Отрезки AC и BL пересекаются в точке M , отрезки KC и BD – в точке N . Докажите, что отрезок MN параллелен основаниям трапеции.
3. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на 5 равных частей. Пусть M и N – вторые точки деления на боковых сторонах, считая от вершин меньшего основания. Найдите MN , если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

Лемма о трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Домашнее задание

4. Через середину M стороны BC треугольника ABC , в котором $AB \neq AC$, проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая прямые AB и AC соответственно в точках D и E . Докажите, что $BD = CE$.
5. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку A отмечена такая точка X , что $AX : AC = 1 : 2$. M и N – середины сторон соответственно AC и BC . На прямой MN отложен отрезок $NY = NM$. Определите, в каком отношении прямая XY делит стороны треугольника ABC .
6. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на 3 части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.
7. Большее основание AD трапеции $ABCD$ равно a , меньшее BC равно b . Диагональ AC разделена на 3 равные части, и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.
8. В треугольнике ABC на сторонах AB , BC и AC взяты соответственно точки M , K и L так, что прямая MK параллельна прямой AC и ML параллельна BC . При этом отрезок BL пересекает отрезок MK в точке P , а AK пересекает ML в точке Q . Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны.

Тест по теме «Биссектриса, башенка и бантик»

1. Точка M расположена на стороне AB треугольника ABC , причем $AM = 15$ см, $BM = 5$ см. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая BC в точке K . Найдите MK , если $AC = 24$ см.
2. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Известны длины оснований $AD = 4$ см, $BC = 6$ см. Диагональ $AC = 12$ см. Найдите длины отрезков AO и OC .
3. В каком отношении точка пересечения биссектрис треугольника ABC делит биссектрису AD этого треугольника, если $AB = 9$, $BC = 12$ и $AC = 15$?

Лемма о трапеции и построения

Построение четвертого пропорционального. Даны отрезки a , b и c . Постройте отрезок $d = ab/c$.

1. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы этой точкой в данном отношении. (Отношение может быть задано как численно, так и с помощью двух отрезков).
2. Через точку O пересечения диагоналей трапеции провели отрезок, параллельный основаниям, с концами на боковых сторонах трапеции. Докажите, что точка O делит его пополам.

Лемма о трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

3. На медиане CC_1 треугольника ABC отметили точку P . Прямая AP пересекает сторону BC в точке A_1 , прямая BP пересекает сторону AC в точке B_1 . Докажите, что отрезок A_1B_1 параллелен AB .
4. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 . С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.
5. На прямой отмечены точки A , M и B , причем $AM = MB$. С помощью одной линейки проведите через данную точку A_1 прямую, параллельную прямой AB .
6. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 . С помощью одной линейки удвойте отрезок, расположенный на одной из них.

Домашнее задание

7. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .
8. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 . С помощью одной линейки разделите отрезок, расположенный на одной из них на n равных частей.
9. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Прямая, параллельная основаниям, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.
10. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), пересекает сторону AB в точке X , сторону CD в точке Y , диагональ AC в точке Z , а диагональ BD в точке W . Найдите отношение $AX : XB$, если основания трапеции BC и AD равны соответственно a и b ($b > a$) и $XZ : ZW = 5 : 3$. Сколько решений имеет задача?
11. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найдите AC .