

Теорема о пропорциональных отрезках и вычисление отношений.

1. Точки А, В, С, D расположены на прямой в указанном порядке.

а) Найдите $AC : CD$, если $AB : BC = 1 : 2$, $BC : CD = 3 : 4$.

б) Найдите $AB : BC$, если $AB : BD = 3 : 2$, $AC : CD = 2 : 1$.

Теорема о пропорциональных отрезках (обобщенная теорема Фалеса). *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.*

Замечание. *Теорема, конечно, верна не только для сторон угла, но и для произвольных прямых. Но чаще используется именно для сторон угла.*

Обратная теорема. *Пусть на одной стороне угла отмечены точки А и A_1 , а на другой – В и B_1 . Если $OA : OA_1 = OB : OB_1$ (или $OA : AA_1 = OB : BB_1$), то прямые АВ и A_1B_1 параллельны.*

2. В треугольнике ABC точка К на стороне АВ и точка М на стороне АС расположены так, что $AK : KB = 3 : 2$, а $AM : MC = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку К параллельно стороне ВС, делит отрезок ВМ.

3. На сторонах АС и ВС треугольника ABC взяты соответственно точки Е и D.

О – точка пересечения отрезков AD и BE.

а) Дано: $BD : DC = 1 : 2$, $AE : EC = 2 : 3$. Найдите $BO : OE$, $AO : OD$.

б) Дано: $AE : EC = 2 : 3$, $AO : OD = 3 : 1$. Найдите $BD : DC$, $BO : OE$.

в) Дано: $BD = DC$, $AO : OD = 5 : 3$. Найдите $BO : OE$, $AE : EC$.

Домашнее задание

4. Точки М и N – середины соседних сторон ВС и CD параллелограмма ABCD. Докажите, что прямые DM и BN пересекаются на диагонали AC.

5. Через точку на стороне четырехугольника проведена прямая, параллельная диагонали, до пересечения с соседней стороной четырехугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная другой диагонали и т. д. Докажите, что пятая точка, полученная таким способом, совпадает с исходной.

6. В треугольнике ABC точка М лежит на стороне АС, а точка L на стороне ВС расположена так, что $BL : LC = 2 : 5$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне АВ, пересекает отрезок ВМ в точке О, причем $BO : OM = 7 : 4$. Найдите отношение, в котором точка М делит сторону АС.

7. На сторонах АВ и АС треугольника ABC взяты соответственно точки Е и D. О – точка пересечения отрезков BD и CE.

а) Найдите $OE : OC$ и $OB : OD$, если $AE : EB = 3 : 4$, $AD : DC = 2 : 5$.

б) Найдите $OB : OD$, если $AE : EB = 1 : 4$, $OE : OC = 3 : 1$.

Теорема о пропорциональных отрезках и вычисление отношений-2

Свойство биссектрисы. *Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.*

Обратная теорема. *На стороне АС треугольника ABC взята такая точка К, что $AK : KC = AB : BC$. Тогда ВК – биссектриса треугольника ABC.*

1. Докажите свойство внешней биссектрисы и обратную теорему: *На продолжении стороны АС неравнобедренного треугольника ABC отмечена точка К. Луч ВК является биссектрисой внешнего угла треугольника ABC тогда и только тогда, когда $AK : KC = AB : BC$.*

2. Стороны треугольника равны a , b и c . Найдите длины отрезков, на которые биссектриса, проведенная из вершины А, делит сторону треугольника.

3. На стороне АВ треугольника ABC отмечена такая точка К, что $AK : KB = 2 : 5$, а на продолжении стороны АС за точку С – такая точка М, что $AM : MC = 4 : 3$. Найдите, в каком отношении прямая МК делит сторону ВС.

4. В треугольнике ABC на стороне АВ взята точка М и на стороне ВС взята точка N. Отрезки AN и CM пересекаются в точке X, причем $CX : XM = 3 : 2$, $AX : XN = 7 : 5$. Найдите отношения $AM : BM$ и $CN : BN$.

5. На сторонах АВ, ВС, АС треугольника ABC взяты соответственно точки К, Е, М. Отрезки ВМ и KE пересекаются в точке О. Известно, что $AK : KB = 2 : 3$, $BE : EC = 4 : 5$, $AM : MC = 2 : 1$. Найдите $BO : OM$, $KO : OE$.

Домашнее задание

6. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла треугольника со сторонами a , b и c , проведенную из вершины В?

7. На сторонах АВ и ВС треугольника ABC взяты точки D и E соответственно, причём $AD : DB = BE : EC = 2$ и $\angle ACB = 2\angle DEB$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

8. В треугольнике ABC на стороне ВС взята точка X так, что $BX : XC = 7 : 2$, и через эту точку проведена прямая, пересекающая сторону АВ в точке N и продолжение стороны АС за точку С в точке М, причем $NX : XM = 3 : 5$. Найдите отношения а) $AM : CM$; б) $AN : BN$.

9. Точка К делит сторону ВС треугольника ABC в отношении $BK : KC = 3 : 1$. На луче АК отмечена точка Т так, что $AK : KT = 5 : 2$. Прямые ВТ и АС пересекаются в точке М. Найдите отношения $BT : TM$ и $AM : MC$.

10. На сторонах АВ, ВС, АС треугольника ABC взяты соответственно точки К, Е, М. Отрезки ВМ и KE пересекаются в точке О. Известно, что $AK : KB = 2 : 3$, $BE : EC = 4 : 5$, $AM : MC = 2 : 1$. Найдите $BO : OM$, $KO : OE$.