Площадь.

Определение. *Каждому многоугольнику ставится в соответствие величина S, называемая* ***площадью*** *и обладающая следующими свойствами:*

1) *Положительная определенность: $S > 0$*
2) *Аддитивность: Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме их площадей.*
3) *Равные многоугольники имеют одну и ту же площадь.*
4) *Площадь квадрата со стороной 1 см равна 1 см^2.*

Теорема. *Площадь S прямоугольника со сторонами a см и b см равна ab см^2.*

Доказательство: Случай 1: числа a и b рациональны. Тогда представим их в виде дробей (возможно, сократимых) с одинаковыми знаменателями: m/n и k/n. Разобьем прямоугольник на mk квадратов со стороной $1/n$ каждый. Из второй и третьей аксиом площади следует (проверьте!), что площадь каждого равна $1/n^2$. Из второй же аксиомы получаем, что площадь прямоугольника $S = mk \cdot 1/n^2 = ab$.

Случай 2: хотя бы одна из сторон выражается иррациональным числом. Если, например, a иррационально, то рассмотрим последовательность все более точных рациональных приближений: $a_1<a<a_1^*$, $a_2<a<a_2^*$, …, $a_n<a<a_n^*$,… . В качестве таких приближений удобно взять, например, десятичные приближения числа a с недостатком и с избытком. При необходимости поступим так же и с b.

Прямоугольник со сторонами a и b содержит внутри себя прямоугольник со сторонами a_n и b_n и сам содержится в прямоугольнике со сторонами a_n^* и b_n^*. Как уже доказано (случай 1), площади этих прямоугольников равны соответственно a_nb_n и $a_n^*b_n^*$. Из первой и второй аксиом площади $\underline{a_nb_n < S < a_n^*b_n^*}$.

Так как при достаточно больших n приближения a_n и a_n^* сколь угодно близки к a, а b_n и b_n^*. – к b, то оба произведения a_nb_n и $a_n^*b_n^*$ сколь угодно мало отличаются от ab.

Из двух подчеркнутых утверждений следует $S = ab$. (Часть, набранная курсивом, доказывается средствами математического анализа.)

Площадь параллелограмма. $S = ah$.
Площадь треугольника. $S = ah/2$.
Площадь трапеции. $S = (a+b)/2 \cdot h$.
Площадь ромба. $S = d_1d_2/2$.

Новогодние задачи.

1. K, L, M, N – середины сторон соответственно AB, BC, CD, DA параллелограмма ABCD. Найдите отношение площади четырехугольника, образованного пересечением отрезков AL, NC, KD и BM к площади параллелограмма.
2. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Найдите отрезок PM, если периметр треугольника ABC равен 10.
3. а) Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до его боковых сторон не зависит от выбора точки.
   б) Докажите, что сумма расстояний от точки внутри правильного треугольника до его сторон не зависит от выбора точки.
4. Дана окружность радиуса R. Две другие окружности, сумма радиусов которых также равна R, касаются ее изнутри. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из общих точек этих окружностей.