

Площадь-4 (вычисление отношений)

- Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника ABCD, равна половине площади ABCD.
- ABCD – выпуклый четырехугольник, его диагонали пересекаются в точке O, причем $AO : OC = 2 : 3$, $BO : OD = 4 : 5$. $S_{ABCD} = S$. Найдите площади треугольников AOB, BOC, COD и DOA.
- Диагонали четырехугольника ABCD пересекаются в точке O. Докажите, что

$$S_{ABC} : S_{ADC} = BO : OD.$$
- На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки E и D, причем $AE : EC = 5 : 3$, $BD : DC = 2 : 7$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найдите $BO : OE$, $AO : OD$.
- На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, E, M. Отрезки BM и KE пересекаются в точке O. Известно, что $AK : KB = 2 : 5$, $BE : EC = 4 : 3$, $AM : MC = 3 : 1$. Найдите $BO : OM$ и $KO : OE$.
- На сторонах AD, BC и CD параллелограмма ABCD отмечены соответственно точки T, K и M, делящие их в отношениях $AT : TD = 3 : 7$, $BK : KC = 1 : 5$, $CM : MD = 1 : 4$. Найдите, в каком отношении отрезки AM и KT делятся их точкой пересечения.

Домашнее задание

- Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.
- ABCD – выпуклый четырехугольник, его диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{AOD} = S_3$. Найдите S_{COD} .
- На стороне AB параллелограмма ABCD отмечена точка K, причем $AK : KB = 1 : 2$. Отрезок KC пересекает диагональ BD в точке M. $S_{BMC} = S$. Найдите площади треугольников BKM, CMD и четырехугольника AKMD.
- Точки E и F делят сторону AB параллелограмма ABCD в отношении $AE : EF : FD = 1 : 2 : 2$, точка K делит сторону BC в отношении $1 : 3$, точка M делит сторону CD в отношении $CM : MD = 3 : 4$. В каком отношении прямая EM делит отрезок KF?
- Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, а стороны BC – в точке K. Определите, в каком отношении отрезки CM и AK делятся их точкой пересечения, если $AB = 10$ см, $BC = 15$ см, $AC = 13$ см. (Для решения двух последних задач используйте площадь)

Площадь-5 (трапеция, отношения и равносоставленность)

- Докажите, что если ABCD – трапеция с основаниями AD и BC, то $S_{ABD} = S_{ACD}$. Верно ли обратное?
- Докажите, что если ABCD – трапеция с основаниями AD и BC, и ее диагонали пересекаются в точке O, то $S_{AOB} = S_{COD}$. Верно ли обратное?
- ABCD – трапеция с основаниями AD и BC, и ее диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Найдите S_{ABCD} .
- Докажите лемму о трапеции: *Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее сторон, делит основания трапеции пополам.*
Указание: Используйте отношение площадей и теорему Чевы.
- Прямые, проходящие через точку на стороне треугольника и параллельные двум другим сторонам, отсекают от него два треугольника с площадями S_1 и S_2 . Найдите площадь данного треугольника.
- Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что площадь части четырехугольника, заключенная между этими отрезками, ровно втрое меньше площади исходного четырехугольника.

Домашнее задание

- Докажите, что площадь трапеции равна произведению боковой стороны и перпендикуляра, проведенного из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую сторону.
- Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные его сторонам. Они разбивают его на шесть частей, три из которых – треугольники с площадями S_1 , S_2 и S_3 . Найдите площадь исходного треугольника.
- Докажите, что если два треугольника, получающиеся при продолжении сторон выпуклого четырехугольника до их пересечения, равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам.
- На стороне OE треугольника POE отмечены точки B и L так, что $OB = BL = LE$, точка M делит сторону PE в отношении $PM : ME = 2 : 7$, точка R делит сторону PO в отношении $OR : RP = 3 : 8$. В каком отношении отрезки BM и RL делятся их точкой пересечения?
- Средины M и N сторон AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD соединены с концами противоположных сторон (M – с C и D, N – с A и B).
 - Докажите, что площадь треугольника ANB равна сумме площадей треугольников ADM и MCB.
 - Докажите, что площадь четырехугольника, ограниченного проведенными отрезками, равна сумме площадей треугольников, прилегающих к сторонам AD и BC.

Задача на пяттерку.

Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь этого пятиугольника.