Программа зачета по темам: «Четырехугольники» и «Отношения отрезков и площадей»

Теория

1. Параллелограмм: определение, свойства, признаки.
2. Прямоугольник: определение, свойства, признаки.
3. Ромб: определение, свойства, признаки.
4. Теорема Фалеса. Деление отрезка на n равных частей.
5. Свойство средней линии треугольника. Свойство средней линии трапеции.
6. Теорема Вариньона.
7. Теорема о пересечении медиан треугольника (3 способа доказательства)
8. Критерии описанности четырехугольника.
9. Вписанная и вневписанные окружности прямоугольного треугольника
10. Обобщенная теорема Фалеса (доказательство для случая рационального отношения отрезков). Обратная теорема. Построение четвертого пропорционального.
11. Свойство биссектрисы треугольника (два доказательства). Свойство внешней биссектрисы.
12. Леммы о башенке и о бантике.
13. Лемма о трапеции (два доказательства).
14. Определение и свойства площади. Площадь прямоугольника.
15. Площадь параллелограмма, треугольника, ромба и трапеции.
16. Теорема Чевы. Обратная теорема. Точки Жергона и Нагеля.
17. Три формулы, связывающие отношения отрезков и площадей.

Задачи

1. Дан параллелограмм ABCD и некоторая точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.
2. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.
3. Около треугольника ABC описана окружность, AD – ее диаметр. M – середина стороны BC, H – ортоцентр треугольника. Докажите, что M – середина отрезка DH.
4. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны, противолежащей этой вершине.
5. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, причем диагонали этого прямоугольника параллельны сторонам параллелограмма и равны разности его соседних сторон.
6. Докажите, что биссектрисы внешних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник. Выразите длины диагоналей этого прямоугольника через длины сторон исходного параллелограмма.
7. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. а) Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из этой же вершины. б) Докажите, что указанные отрезок и медиана перпендикулярны.
8. Угол при вершине A ромба ABCD равен 60°. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N, причем AM=BN. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.
9. Восстановите пятиугольник по серединам его сторон.
10. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.
11. Постройте треугольник: а) по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам; б) по трем медианам.
12. Точки K, L, M, N – середины сторон соответственно AB, BC, CD и DE пятиугольника ABCDE, а P и Q – середины отрезков соответственно KM и LN. Докажите, что PQ ∥ AE и PQ=1/4 AE.

13. Докажите, что трапеция является равнобокой тогда и только тогда, когда
    а) углы при одном из ее оснований равны;
    б) ее диагонали равны.
14. а) Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
    б) Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
    в) Постройте трапецию по боковым сторонам, отрезку, соединяющему середины оснований, и меньшему основанию
15. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего середины ее диагоналей.
16. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а другая – соответственно в точках C и D. Найдите AB, если $AC = a$, $BD = b$.
17. Дана трапеция ABCD с основаниями BC и AD. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, а углов C и D – в точке N. Докажите, что $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.
18. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC отмечены такие точки C_1, B_1, A_1, что $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$, $CB_1 = CA_1$. Докажите, что A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.
19. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, E, M. Отрезки BM и KE пересекаются в точке O. Известно, что $AK : KB = 2 : 3$, $BE : EC = 4 : 5$, $AM : MC = 2 : 1$. Найдите $BO : OM$, $KO : OE$. Решите задачу: а) с помощью обобщенной теоремы Фалеса; б) с помощью площади.
20. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на 5 равных частей. Пусть M и N – вторые точки деления на боковых сторонах, считая от вершин меньшего основания. Найдите MN, если основания трапеции равны a и b ($a > b$).
21. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Прямая, параллельная основаниям, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.
22. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2. С помощью одной линейки а) разделите пополам; б) удвойте; в) разделите на n равных частей отрезок, расположенный на одной из них.
23. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри правильного треугольника до его сторон не зависит от выбора точки.
24. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC площади 1 взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, причем $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника, вершины которого – попарные пересечения отрезковAA_1,BB_1, CC_1.
25. Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника ABCD, равна половине площади ABCD.
26. На стороне AC треугольника ABC взяты такие точки D и E, что $AD : DE : EC = 1 : 2 : 3$. Медиана AK пересекает отрезки BD и BE соответственно в точках O и T. Площадь треугольника AOD равна 1 см^2. Найдите площадь треугольника TBK.
27. Точки E и F делят сторону AB параллелограмма ABCD в отношении $AE : EF : FD = 1:2:2$, точка K делит сторону BC в отношении $1 : 3$, точка M делит сторону CD в отношении $CM : MD = 3 : 4$. В каком отношении прямая EM делит отрезок KF?
28. Докажите, что если ABCD – трапеция с основаниями AD и BC, и ее диагонали пересекаются в точке O, то $S_{AOB} = S_{COD}$.
29. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные его сторонам. Они разбивают его на шесть частей, три из которых – треугольники с площадями S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь исходного треугольника.
30. Середины M и N сторон AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD соединены с концами противолежащих сторон (M – с C и D, N – с A и B. Докажите, что площадь четырехугольника, ограниченного проведенными отрезками, равна сумме площадей треугольников, прилегающих к сторонам AD и BC.
31. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь этого пятиугольника.