

Прямая Симсона и точка Микеля

Теорема. Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой (**прямая Симсона**).

Роберт Симсон (1687-1768) – шотландский математик. А теорему доказал в 1797г. Вильям Уоллес.

1. Какая точка окружности имеет прямую СА своей прямой Симсона?
2. Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или их продолжения, коллинеарны. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности треугольника.
3. Точки A , B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры O_c , O_a и O_b описанных окружностей треугольников ABP , BSP , ACP и точка P лежат на одной окружности. *Указание.* Рассмотрите треугольник $O_cO_aO_b$.

Теорема Сальмона. Пусть на трех хордах одной окружности PA , PB и PC как на диаметрах построены окружности. Тогда эти окружности попарно пересекаются вторично в трех коллинеарных точках.

Теорема Микеля о четырех прямых. Четыре прямые общего положения при пересечении образуют четыре треугольника. Описанные около этих треугольников окружности пересекаются в одной точке. Эта точка называется **точкой Микеля** полного четырехсторонника.

4. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников, образованных при пересечении четырех прямых общего положения, лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

Домашнее задание

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку P этой окружности проведена прямая, перпендикулярная к BC и пересекающая окружность вторично в точке E . Докажите, что прямая AE параллельна прямой Симсона, соответствующей точке P .
6. Треугольник вписан в окружность, и для двух точек этой окружности построены прямые Симсона. Докажите, что угол между этими прямыми равен половине величины дуги, заключенной между указанными точками окружности.
7. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC , P — точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам. *Указание.* Проведите через точки P и H прямые, перпендикулярные стороне BC . Пусть точка P_1 симметрична точке P относительно BC . Докажите, что прямая HP_1 параллельна прямой Симсона.
8. Точка P принадлежит описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точки, симметричные P относительно сторон треугольника, коллинеарны.
9. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M , проведена общая касательная. Докажите, что если A и B – точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.