Производная последовательности.

Теория и разминка

Пусть нам дана последовательность a_n. Назовём её **производной** *последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ разностей между соседними элементами. Штрих около буквы — традиционное обозначение для производной (введённое великим французским математиком и механиком Жозефом Луи Лагранжем).*

1) Выпишите явную формулу и первые 6 членов производных следующих последовательностей:
а) $a_n = 1543$; б) $a_n = n+1$; в) $a_n = n^2 - 3n$; г) $a_n = \frac{1}{n}$.

Операция взятия производной последовательности называется её **дифференцированием**. *Производную последовательности a_n можно повторно продифференцировать, получив последовательность, называемую второй производной, и обозначаемую a''_n. Можно дифференцировать и дальше, получив 3-ю, 4-ю и т.д. производные.*

2) Напишите явную формулу для a'''_n.
а) $a_n = n^2$; б) $a_n = (-1)^n$;

3) Предположим, что нам не дана последовательность a_n, но дана её производная. Можно ли, зная a'_n, восстановить a_n? А если нам известен член a_1 исходной последовательности?

Восстановление последовательности по произвожной и первому члену называется задачей Коши в честь великого французского математика, основателя математического анализа Огюстена Луи Коши.

Упражнения

3) Докажите следующие свойства производной:
а) Если $c_n = a_n + b_n$, то $c'_n = a'_n + b'_n$;
б) Если $c_n = ka_n$, то $c'_n = ka'_n$;
в) Если $c_n = a_n b_n$, то $c'_n = a'_n b_n + a_{n+1} b'_n = a'_n b_{n+1} + a_n b'_n$.

Последнее правило называется правилом Лейбница в честь знаменитого немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница. Интересно, что Лейбниц, будучи философом и сторонником теории мировой гармонии, никак не хотел верить, что формула так некрасива (ему представлялось, что должно быть $c'_n = a'_n b'_n$). Лейбниц очень не сразу (и не без давления коллег-математиков), наконец, признал, что в этом мире не всё так просто, зато формула получила его имя :)

4) Посчитайте производные следующих последовательностей:
а) $a_n = (n-3)(n+2)$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$; в) $a_n = \frac{n-1}{n}$.

5) Дана последовательность $a_n = n^8$. Докажите, что a'_n делится на $2n+1$.

6) Найдите все последовательности e_n, такие, что
а) $e'_n = e_n$; б) $e'_n = \frac{e_n}{n}$.

7) Пусть последовательность a_n удовлетворяет следующим условиям: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a''_n + a'_n = a_n$. Найдите a_7.

8) Пусть $a_1 = 1$ и дана a'_n. Найдите a_n.
а) $a'_n = 5$; б) $a'_n = 2^n$; в) $a'_n = 2n+1$; г) $a'_n = 2^n \cdot n$.