

Числа Фибоначчи.

Теория и разминка

При рекуррентном задании последовательности часто следующий член последовательности вычисляется по предыдущему. Но это не обязательно всегда так. Последовательность Фибоначчи F_n — один из простейших и важнейших примеров, когда следующий член последовательности вычисляются по нескольким предыдущим членам

Последовательность Фибоначчи F_n задаётся правилами: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

1) Выпишите первые 10 членов последовательности Фибоначчи

2) Некто приобрёл пару кроликов и поместил их в огороженный со всех сторон загон. Сколько кроликов будет через год, если считать, что каждый месяц пара даёт в качестве приплода новую пару кроликов, которые со второго месяца жизни также начинают приносить приплод?

Этой задаче более восьмисот лет. Она взята из "Книги абака" ("Liber Abaci", 1202г.), математического сочинения итальянского купца, математика, просветителя, путешественника Леонардо из Пизы (1180 – 1240), получившего прозвище Фибоначчи (Боначчи было именем его отца, начальное Фи- от лат. *filius* – сын). Фибоначчи жил задолго до Возрождения, но правивший в то время император Священной Римской Империи Фридрих II был просвещённым человеком, покровительствовавшим наукам и искусствам. Фибоначчи много лет провёл на Востоке, перенимая знания у арабских учёных. От Фибоначчи европейцы узнали, например, индийские (арабские) цифры. По его книге изучали математику ещё несколько столетий.

Упражнения

3) Найдите F'_n .

4) Вдоль дороги уходит вдаль цепочка пронумерованных столбиков: 1-ый, 2-ой, 3-ий ... Крошка Ру сидит около первого столбика. За один прыжок он может прыгнуть к соседнему столбику или к тому, что через один. Прыгает он только вперёд. Сколькими различными способами он сможет допрыгнуть до n -ого столбика?

5) Для каких n верно $F_n = n$?

6) По какому закону расположены в последовательности Фибоначчи чётные и нечётные числа?

7) Докажите, что каждое четвёртое число Фибоначчи делится на три.

8) Написана дробь $\frac{1}{1}$. К ней прибавляют единицу, после чего дробь переворачивают. Получается вторая дробь, из неё таким же образом получают третью и так далее. а) Какая дробь будет n -ой по счёту? б) Будут ли среди этих дробей сократимые?

9) Попробуйте продолжить последовательность Фибоначчи влево: подберите $F_0, F_{-1}, F_{-2}, F_{-3}$ и так далее, чтобы сохранялось свойство $F_{n+2} = F_n + F_{n-1}$. Чему равно F_{-n} ?

10) Есть доска $2 \times n$ клеточек. Сколько существует способов покрыть её доминошками (плитками 1×2)?

11) Для каких n верно $F_n = n^2$?

12) Сложите первые n чисел Фибоначчи: $F_1 + F_2 + \dots + F_n$. Что получилось? Почему?