Метод математической индукции – 2.

Задачи:

1) Найдите сумму первых нескольких нечётных чисел. Составьте и докажите соответствующую формулу.

2) Докажите, что при любом натуральном n число $5^n - 2^n$ нацело делится на 3.

3) На плоскости проведено n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке.

а) На сколько частей они делят плоскость?

б) Докажите, что эти части можно покрасить в два цвета так, чтобы части, имеющие общую протяжённую границу, были покрашены по-разному.

4) Каждый из n юных поэтов ($n \geqslant 4$) сочинил гениальное стихотворение. За один телефонный разговор два поэта сообщают друг другу все известные им стихи (и запоминают все услышанные). Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут сообщить друг другу все свои стихи.

5) Найдите сумму:

а) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n$.

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

в) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \ldots + n \cdot 2^n$ (сравните с задачей 8г листка 1.2).

6) Несколько мальчиков и столько же девочек встали в круг. Докажите, что число пар рядом стоящих мальчиков равно числу пар рядом стоящих девочек.

7) Лёша доказал новую теорему: ”Если равносторонний треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный”. Вот его доказательство: ”Проведём индукцию по числу треугольников разбиения. База: усли треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них, очевидно, не остроугольный. Шаг: пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведем еще один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n + 1$ треугольник, причем один из двух новых треугольников будет не остроугольный. Теорема доказана”. Верно ли рассуждение Лёши? Верна ли сама теорема?

8) Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{n-1}{n}$.

9) Докажите тождество Кассини для чисел Фибоначчи: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

10) Вершины выпуклого 1543-угольника покрасили в три цвета так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что этот многоугольник можно триангулировать диагоналями так, чтобы у каждого треугольника цвета всех вершин были различны.