

Делимость.

Теория и разминка.

В этом листке мы имеем дело только с целыми числами.

Для двух чисел a и b может найтись такое число c , что $a = bc$. Если это так, то говорят, что число b является делителем числа a . Пишут это обычно в виде $a : b$ (читают: "а делится на b " или "а кратно b ") или в виде $b | a$ (читают: "b делит a"). Например, $6 : 2$, $-1001 : 13$, $2008 : (-8)$. Несмотря на то, что по этому определению $0 : 0$, полагают, что 0 не делит никакое число.

1) Докажите, что:

а) Если $a : c$ и $b : c$, то $(a \pm b) : c$ (аддитивность).

б) Если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$ (транзитивность).

2) Верно ли, что:

а) Если $a : b$, то $ca : b$?

б) Если $a : b$ и $a : c$, то $a : bc$?

в) Если $ab : c$, то или $a : c$, или $b : c$?

Предположим, что мы хотим понять, делится ли натуральное число a на натуральное число b , не применяя при этом операцию деления в столбик (которая иногда бывает весьма трудоёмка). Для достижения нашей цели можно воспользоваться признаками делимости, т.е. фактами вида "если выполняется нечто, то a делится на b ". При этом важно, чтобы это самое нечто проверялось проще, чем выполнение деления в столбик, иначе весь смысл теряется.

3) Докажите следующие признаки делимости:

а) Если последняя цифра числа делится на 2, то число делится на 2.

б) Если число заканчивается на два нуля, то оно делится на 25.

в) Если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9.

г) Если $a - b$ делится на 11, то $10a + b$ делится на 11.

д) Если сумма цифр числа, стоящих на нечётных местах, равна сумме цифр, стоящих на чётных местах, то это число делится на 11.

е) Если $a - 2b$ делится на 7, то $10a + b$ делится на 7.

Утверждение вида: "Если выполнено A , то выполняется B , а если выполнено B , то выполняется A ", или, более кратко, " A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B ", называется **критерием**. Какие из перечисленных выше признаков делимости являются критериями?

4) Сформулируйте и докажите критерии делимости на 3, 4, 9, 25.

Задачи:

5) Известно, что $28a + 30b$ кратно 13. Докажите, что $15a + 43b$ тоже кратно 13.

6) Сформулируйте и докажите критерии делимости на 8 и 125.

7) Верен ли критерий делимости на 27, аналогичный критериям делимости на 3 и 9? Верен ли такой признак делимости?

8) Докажите, что число $111 \dots 1$ (3^n единиц) кратно 3^n .

9) Докажите критерий делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма его цифр кратна 11.

10) Придумайте десятизначное число, которое: 1) делится на 11; 2) состоит из различных цифр; 3) не придумано пока никем из Ваших одноклассников.

11) Найдите самое большое натуральное число, из которого нельзя вычеркнуть несколько цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 11.

12) Влад обнаружил, что число 817 делится на 43 и написал это число на доске. На перемене его одноклассники вписали между цифрами 1 и 7 все свои плохие оценки по спецкурсу. Докажите, что получившееся число всё равно делится на 43.

13) Автобусные билеты нумеруются с 000000 до 999999. Билет считают счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних. Докажите, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

14) Учитель дал задание заменить в слове МАТЕМАТИКА разные буквы разными цифрами, а одинаковые — одинаковыми так, чтобы получившееся число делилось на 137. Сёма, у которого тройка по русскому языку, записал слово с ошибкой: МАТЕМАТЕКА. Докажите, что теперь Сёме не удастся решить задачу, несмотря на пятерку по математике. А можно ли решить поставленную задачу, если написать слово грамотно?

15) Трёхзначное число делится на 37. Докажите, что в нём можно так переставить цифры, что полученное число тоже будет делиться на 37.

16) Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Сначала написано число 37, потом 1. Какое число следующее?