

Линейные диофантовы уравнения

Теория и разминка

- 1) Имеет ли решение в целых числах уравнение: а) $15x + 43y = 1$; б) $15x + 43y = 740$;
в) $30x + 86y = 2$; г) $30x + 86y = 1$?

Теорема 1. Для любых двух взаимно простых чисел a и b найдется пара целых чисел x_0 и y_0 , удовлетворяющая уравнению $ax + by = 1$.

Доказательство. Рассмотрим числовое множество $M = \{ax + by \mid x, y \in Z\}$. Заметим, что $a \in M$, $b \in M$. Среди натуральных элементов M выберем наименьший элемент c .

Докажем, что произвольное $t \in M$ делится на c без остатка. Пусть $t = kc + r$, $0 < r < c$. Так как $t \in M$ и $c \in M$, то и $r \in M$, что противоречит минимальности c .

Итак, все $t \in M$ кратны c . В частности, $a : c$ и $b : c$. Но a и b взаимно просты, а это означает, что $t = 1$, поэтому $1 \in M$.

Следствие. Если $\text{НОД}(a, b) = d$, то существует пара целых чисел x_0 и y_0 , удовлетворяющая уравнению $ax + by = d$.

- 2) а) Найдите какое-нибудь целочисленное решение уравнения $7x - 9y = 1$.
б) Докажите, что это уравнение имеет бесконечно много целочисленных решений.

Теорема 2. Пусть числа a и b взаимно просты. Тогда если $ac : b$, то $c : b$.

Теорема 3. Пусть (x_0, y_0) — некоторое целочисленное решение уравнения $ax + by = c$, где a и b взаимно просты. Тогда все решения этого уравнения в целых числах получаются по формулам $x = x_0 + bt$; $y = y_0 - at$, где t — произвольное целое число.

- 3) Решите в целых числах уравнение:
а) $7x + 12y = 1$; б) $18x + 66y = 24$; в) $34x + 85y = 28$.

Частное решение линейного диофантова уравнения не всегда легко найти подбором. На помощь приходит обратный алгоритм Евклида.

- 4) Решите в целых числах уравнение $109x + 89y = 1$.

- 5) Имеет ли уравнение $2352x + 607y = 1$ решение в целых числах?

6) Решите в целых числах уравнение:

- а) $531x + 76y = 1$; б) $607x + 531y = 1$; в) $2352x + 607y = 1$.

7) Решите в целых числах уравнение:

- а) $411x + 38y = 1$; б) $111x - 25y = 4$; в) $65x + 110y = 5$.

- 6) При каких целых x дробь $\frac{21 - 133x}{84}$ принимает целые значения?

7) Сколько целых точек расположено на прямой $y = \frac{8}{13}x + \frac{6}{13}$ в полосе между прямыми $x = -100$ и $x = 50$?

- 8) Имеет ли целочисленные решения уравнение: а) $69x + 253y = 94$; б) $28x + 30y + 31z = 365$?

9) Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?