Расстояние. Неравенство треугольника.

Теория и разминка.

Общеизвестно обиходное выражение "кратчайшее расстояние между точками есть прямая". Говоря так, обычно имеют в виду, что длину отрезка, соединяющего две точки плоскости можно принять за меру удалённости их друг от друга. Такую меру принято называть **расстоянием** *между точками. Оправдывает такой выбор тот факт, что расстояние действительно в некотором смысле кратчайшее: оно не уменьшится, если "по дороге заходить" в промежуточную точку.*

1) Докажите, что если в треугольнике один угол меньше другого, то и противолежащая ему сторона тоже меньше стороны, противолежащей другому углу.

2) Докажите **неравенство треугольника**: в любом треугольнике ABC верно неравенство: $AB + BC > AC$.

3) Докажите, что для любых трёх точек A, B, C на плоскости верно неравенство: $AB + BC \geqslant AC$. В каких случаях достигается равенство?

Неравенство $AB+BC \geqslant AC$ и берут за основу при общем определении расстояния между точками (или другими объектами). А именно, говорят, что задано **расстояние между точками**, *если любой паре точек $(A\,,\,B)$ соответствует положительное число $\rho(A\,,\,B)$, причём для любых трёх точек справедливо (обобщённое) неравенство треугольника: $\rho(A\,,\,B)+\rho(B\,,\,C) \geqslant \rho(A\,,\,C)$. Расстояние между совпадающими точками по определению считается нулевым.*

Из доказанного ясно, что длина отрезка действительно может служить расстоянием. Говоря о расстоянии между точками A и B мы будем, как правило иметь в виду именно её и писать не $\rho(A\,,\,B)$, а просто AB. Но иногда речь будет идти о других способах измерения расстояния.

Задачи:

4) Дано несколько точек: A_1, A_2, A_3,… A_n. Докажите, что $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n$. Когда возможно равенство?

5) Даны две точки, A и B. Какие точки плоскости расположены ближе к A, чем к B?

6) Если школьники в туристическом походе достают руководителя похода дурацкими вопросами типа "А сколько нам ещё идти?", он отвечает "2 км" (проверьте при случае). Предположим, что мы считаем расстояние между совпадающими точками равным 0, а между различными точками — всегда равным 2 км. Будет ли выполняться неравенство треугольника?

7) Каково расстояние от 2 до 5? Придумайте какой-нибудь способ измерить расстояние между числами.

8) Два отрезка пересекаются. Докажите, что суммарное расстояние от точки пересечения до концов отрезков (всех четырёх) меньше, чем таковое от любой другой точки.

9) Невдалеке от двух деревень проходит шоссе. Укажите, где на нём строить автобусную остановку так, чтобы суммарное расстояние от неё до обеих деревень было минимальным.

10) Дорога и река (прямые линии) пересекаются под острым углом (там мостик). Внутри угла стоит всадник. Всаднику требуется напоить коня и выехать на дорогу. Как это сделать, проехав минимальное расстояние?

11) Две реки (прямые линии) с мёртвой и с живой водой сливаются под острым углом. Внутри угла стоит Иванушка-дурачок. Он хочет набрать живой и мёртвой воды и вернуться на исходное место. Как это сделать, проехав минимальное расстояние?

12) а) На стороне треугольника ABC (не на AC) взята точка D. Докажите, что $AD + DC < AB + BC$. б) Внутри треугольника ABC взята точка D. Докажите, что $AD + DC < AB + BC$.

13) В остроугольном треугольнике ABC точки E и F суть середины сторон AB и BC соответственно. На стороне AC выбрана точка M так, что $ME > EA$. Докажите, что $MF < FC$.

14) На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Люба соединила некоторые точки прямолинейными отрезками. Оказалось, что некоторые отрезки пересекаются. Лера взялась соединить точки по-другому, сохранив количество отрезков и сделав их непересекающимися. Именно, Лера, заметив два пересекающихся отрезка AB и CD, стирает их и чертит отрезки AC и BD. Добьётся ли Лера своего?

15) Сопоставим каждой точке A плоскости её координаты $(a_x\,;\,a_y)$. Докажите, что в качестве расстояния между точками можно принять а) $\rho(A\,,\,B) = |a_x - b_x| + |a_y - b_y|$; б) $\rho(A\,,\,B) = max\,(|a_x - b_x|\,,\,|a_y - b_y|)$.