Зацикливание.

Теория и разминка.

1) Найдите остаток от деления на 7 числа 45^{500}.

Периодичность: *Последовательность $\{a_n\}$ называется* ***периодической****, если, начиная с некоторого номера её члены повторяются: $a_{n+K} = a_n$. Здесь натуральное число K называется длиной периода, а бесконечно повторяющаяся группа членов последовательности —* ***периодом****. Иногда появлению периода предшествует несколько членов последовательности, составляющих* ***предпериод****.*

2) На планете Шелезяка бывает три типа погоды: штиль, магнитная буря и метеоритный дождь. Погода каждого дня постоянна и определяется погодой предшествовавшей недели. Однажды всю неделю на Шелезяке лил метеоритный дождь. Докажите, что дождливые недели

а) будут и в дальнейшем.

Принцип зацикливания: *Если система может находиться только в конечном числе состояний, и состояние в данный момент времени однозначно определяет состояние в следующий момент времени, то, начиная с некоторого момента, состояния начнут периодически повторяться.*

б) были и раньше.

Принцип незапамятных времён: *Предпериод не может длиться сколь угодно долго.*

3) В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что он когда-нибудь вернётся в свой замок.

Принцип зацикливания назад (обратный ход): *Если число состояний конечно, и каждое состояние однозначно определяет как последующее состояние, так и предыдущее, то в последовательности состояний предпериод отсутствует.*

4) Верно ли, что найдется степень числа 13, оканчивающаяся на 001?

Задачи:

5) Найдите последнюю цифру числа: а) $88^{33^{44}}$; б) $7^{7^{7^{7^{7}}}}$; в) числа щелбанов, которые получил бы Петя из задачи №11 прошлого листка, дав 5 оплеух и 1 подзатыльник.

6) Число 2009 возвели в куб и к результату прибавили 3. Полученное число снова возвели в куб и к результату прибавили 3 и т. д. до бесконечности. Может ли в получившемся ряду чисел встретиться число, оканчивающееся на 8?

7) Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного состояния. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту комбинацию еще несколько раз.

8) По кругу стоит несколько коробочек. В каждой из них может быть 0, 1 или несколько шариков. Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

9) а) Докажите, что цифры в десятичной записи числа $\frac{1}{n}$ периодически повторяются. б) Докажите, что если n не кратно ни 2, ни 5, то в их последовательности нет предпериода, а если кратно, то есть.

10) Первые четыре члена последовательности равны 8, 4, 8 и 6, а каждый следующий член равен последней цифре суммы четырех предыдущих. Докажите, что в этой последовательности встретятся идущие подряд числа 2, 0, 0, 6.

11) Докажите, что в последовательности Фибоначчи: а) найдется число, дающее остаток 5 при делении на 2009; б) найдется число, кратное 2009; в) найдется бесконечно много чисел, кратных 2009; г) найдется число, оканчивающееся на 021.

12) Докажите, что среди первых n^2 чисел Фибоначчи найдется число, делящееся на n.

13) Первые два члена последовательности $a_1 = 15$, $a_2 = 43$. Последующие члены вычисляются по правилу: $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$. Чему равен 2009-ый член последовательности?

14) В тридесятом королевстве у каждого перекрестка и у каждого замка сходятся по три дороги. Несколько рыцарей пировали в замке, а поутру каждый поехал своей дорогой. За день каждый проезжает до следующей развилки, а утром следующего дня выбирает дорогу, по-прежнему чередуя левые и правые повороты. Докажите, что когда-нибудь все они вновь соберутся в этом же замке (если доживут).