Множества.

Под множеством мы понимаем объединение в одно целое определённых, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли.
Георг Кантор

Теория и разминка.

1) Можно ли считать слова Георга Кантора определением множества?

Скажем, что множество есть математический "объект", такой что любой "объект" либо "принадлежит" этому множеству, либо нет. Слова "объект" и "принадлежит" должны пониматься интуитивно: множества лежат в самой основе математики и начальные понятия этой теории не выражаются через другие. На умении выделять, характеризовать и группировать объекты построено мышление человека.

Договоримся об обозначениях. Множества будем обозначать заглавными буквами, принадлежность будем записывать знаком $\in$ (например, $a \in A$). Объекты, принадлежащие множеству, по отношению к нему называются его элементами.

Если каждый элемент множества A принадлежит B, то будем писать $A \subset B$ и говорить, что A есть **подмножество** множества B. Мы вполне вправе написать, что $A \subset A$.

Два множества назовём **равными**, если каждое из них есть подмножество другого.

Множество, которому ничего не принадлежит, назовём **пустым** и будем обозначать $\emptyset$. Считается, что $\emptyset \subset A$ при любом A.

Задать множество можно описанием свойства, по которому мы относим к нему объекты (например, множество простых чисел, множество городов России). Если множество невелико, то можно записать его, перечислив элементы в фигурных скобках, например $\{\diamond, \bigcirc, \triangleleft, \dagger\}$ (ВНИМАНИЕ, множество не сундук, запись $\{\diamond, \diamond, \dagger\}$ некорректна).

2) **Объединением** двух множеств называется множество, содержащее все их элементы и больше ничего лишнего. Обозначение $A \cup B$. Перечислите все элементы $\{\dagger, \diamond\} \cup \{\dagger, \bullet\}$.

3) **Пересечением** двух множеств называется множество, содержащее только те элементы, что принадлежат сразу обоим. Обозначение $A \cap B$. Перечислите все элементы $\{\dagger, \diamond\} \cap \{\dagger, \bullet\}$.

4) **Разностью** двух множеств называется множество, содержащее только те элементы первого из них, которые не принадлежат второму. Обозначение $A \setminus B$. Перечислите все элементы $\{\dagger, \diamond\} \setminus \{\dagger, \bullet\}$.

5) Докажите, что $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

К сожалению, далеко не любые мыслимые множества имеют право на существование. Например, английскому философу Бертрану Расселу приписывают пример, который называется "парадоксом брадобрея".

6) В одном полку солдату-брадобрею (т. е., парикмахеру) приказали брить всех солдат, которые не бреются сами. Должен ли брадобрей брить самого себя?

Задачи:

5) Докажите следующие соотношения: а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

6) Верно ли, что: а) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$? б) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$? в) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$?

7) а) Старейший шахматист среди математиков и старейший математик среди шахматистов — это один и тот же человек, или они могут быть разными? б) Лучший шахматист среди математиков и лучший математик среди шахматистов — это один и тот же человек, или они могут быть разными?

8) Известно, что доля сумасшедших среди математиков выше, чем среди остального населения. Докажите, что доля математиков среди сумасшедших выше, чем среди остальных людей.

8) Запишите $A \cap B$ а) с использованием только $\cup$ и $\setminus$; б) только $\setminus$.

9) Сколько подмножеств у множества, содержащего а) 3 элемента; б) 4 элемента; в) n элементов?

10) Каждый марсианин знает ровно 2008 слов. С Марса отправляется 2009 летающих тарелок. Известно, что в каждой тарелке сидит хотя бы один марсианин и если выбрать из каждой тарелки по одному марсианину, то всегда найдётся такое слово, которое знают все 2009 выбранных индивидуумов. Докажите, что по крайней мере для одной тарелки есть слово, которое знают все её обитатели.

11) Пусть M — конечное множество чисел. Известно, что среди любых трёх его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?

12) Пусть в множестве A n элементов, а в множестве $B \subset A$ k элементов. Сколько существует таких множеств C, что $B \subset C \subset A$?