Конечные и бесконечные множества. Биекции.

Теория и разминка.

Понятие бесконечности — одно из самых важных в математике и философии познания. На вопрос "что такое натуральные числа?" мы даём ответ: "1, 2, 3, 4, 5 и так далее". Но что значит "и так далее"? Трудно сказать. Мы понимаем, что задана конструкция, которая позволяет строить всё новые и новые объекты, хотя построить их все невозможно. Бесконечность ненаблюдаема в природе; даже наша Вселенная, по современным представлениям, конечна. Однако бесконечность постижима разумом, поскольку, по-видимому, порождена им. В этом маленьком листке несколько несложных задач для знакомства с конечными и бесконечными множествами.

Чтобы различать множества по количеству элементов, пользуются идеей сопоставления их элементов друг другу, — идеей, лежащей, как и само понятие множества, в основе математики.

Если каждому элементу множества A можно сопоставить элемент множества B (причём каждое число из B должно быть использовано и при этом ровно один раз), то выходит, что множества A и B в некотором смысле имеют поровну элементов. В таком случае говорят, что A и B ***равномощны****.*

Если множество M равномощно множеству $E_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, то говорят, что M — ***конечное множество****, содержащее n элементов. При этом E_n понимается как эталонное множество, с которым сравнивается множество M. Сам процесс сравнения обычно на практике называется нумерацией — говорят "пронумеруем элементы M числами от 1 до n". Пустое множество $\emptyset$ тоже считается конечным, имеющим 0 элементов. Все прочие множества называются* ***бесконечными****. Одним из эталонов бесконечного множества служит $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.*

1) Докажите, что в 100-элементном множестве количество 43-элементных подмножеств равно количеству 57-элементных.

2) Докажите, что чётных натуральных чисел "столько же, сколько и нечётных" (то есть установите биекцию между указанными множествами).

Задачи:

3) Каких пятизначных чисел больше — тех, которые делятся на 5 или тех, у которых первая и вторая цифры — не пятёрки?

4) На окружности пометили 2008 белых точек и одну красную. Каких треугольников с вершинами в этих точках больше — имеющих красную вершину или не имеющих?

5) Влад и Миша поспорили, сколько будет $1-1+1-1+1-1+\ldots$. Влад говорит, что ноль: $1-1+1-1+1-1+\ldots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots = 0$. Миша считает, что единица: $1-1+1-1+1-1+\ldots = 1-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1-0-0-0-\ldots = 1$. Рассудите, кто из них прав.

6) В российских учебниках математики 0 не считают натуральным числом, а во французских считают. Докажите, что множества натуральных чисел "по российской и по французской системе" равномощны.

7) Докажите, что чётных чисел "столько же, сколько натуральных".

8) В тарабарском языке есть три согласные буквы — "т", "р" и "б" — и одна гласная — "а". Словом является любая последовательность букв, не нарушающая правил: гласные и согласные в словах чередуются, с гласной слово не начинается. а) Сколько семибуквенных слов в тарабарском языке? б) Каких слов в нём больше — 99-буквенных или 100-буквенных? в) Придумайте биекцию между $\mathbb{N}$ и множеством всех слов тарабарского языка.

9) Разделите прямую на две равные части.