Мощность множества. Счётность и несчётность.

Теория и разминка.

Бесконечные множества, для которых понятие количества элементов теряет смысл, можно сравнивать только устанавливая биекцию с некоторыми другими эталонными множествами. Аналогом количества элементов в этом случае будет понятие ***мощности множества****. Ещё раз напомним, что множества A и B называются* ***равномощными****, если между ними можно установить биекцию.*

1) Докажите, что каждое множество равномощно самому себе; что если A равномощно B, то и B равномощно A; наконец, что из A равномощно B и B равномощно C следует, что A равномощно C.

Из этой задачи вытекает, что все множества, равномощные данному, равномощны друг другу и не равномощны никаким другим множествам. Тем самым они составляют некую обособленную группу (которую правильно называть классом эквивалентности) среди всех множеств. Про эти множества говорят, что у них одинаковая мощность. Самые "маленькие" из бесконечных множеств — ***счётные****.*

Множество A ***счётно****, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Иными словами, элементы счётного множества можно "пересчитать", занумеровать натуральными числами.*

2) Докажите, что множество конечных последовательностей из нулей и единиц счётно.

Следующая задача показывает, что счётные множества — самые "маленькие" из бесконечных.

3) Докажите, что в любом бесконечном множестве есть счётное подмножество.

Оказывается, не всякое бесконечное множество можно пересчитать. Следующий пример принадлежит Кантору и, по мнению многих, является одним из самых блестящих математических рассуждений.

4) (Кантор) Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц несчётно. Это множество служит эталонным для других равномощных ему множеств — такие множества, как говорят, **имеют мощность континуума**.

5) Докажите, что любые два отрезка (как множества точек) равномощны.

Задачи:

6) Докажите, что объединение конечного и счётного множества счётно.

7) а) Есть бесконечный в обе стороны ряд стульев. В одном стуле зашиты бриллианты. Как должен действовать Остап Бендер, чтобы найти стул с сокровищами? б) Докажите, что множество целых чисел счётно.

8) Докажите, что объединение двух счётных множеств счётно.

9) а) На складе хранится счетное множество сырков "Виола". Пришла мышка, съела счетное множество сырков. Сколько сырков могло остаться на складе? б) как изменится ответ, если придут 100 мышек, и каждая съест счетное множество сырков; в) если придет счетное множество мышек и каждая съест по 100 сырков; г) если придет счетное множество мышек, и первая съест один сырок, а каждая следующая будет съедать на один сырок больше, чем предыдущая; д) если придет счетное множество мышек и каждая съест счетное множество сырков?

10) а) **Высотой** положительного рационального числа называют сумму числителя и знаменателя в его представлении несократимой дробью. Докажите, что рациональных чисел с высотой n ровно столько, сколько натуральных чисел меньше n и взаимно просто с n. б) Докажите, что множество рациональных чисел счётно.

11) Докажите, что множество пар $(p\,;\,q)$, где p — элемент счётного множества A, а q — элемент счётного множества B, счётно.

12) а) Счётно или несчётно множество квадратных уравнений с целыми коэфициентами? б) А множество корней квадратных уравнений с целыми коэффициентами?

13) Счетно ли множество: а) конечных десятичных дробей; б) бесконечных периодических десятичных дробей без предпериода; в) всех бесконечных периодических десятичных дробей; г) всех бесконечных десятичных дробей; д) бесконечных непериодических десятичных дробей?

14) Докажите, что любые две окружности равномощны.

15) Интервал $(a\,;\,b)$ — множество решений неравенства $a < x < b$ (при $a < b$). Докажите, что любые два интервала равномощны.

16) а) Докажите, что интервал равномощен полуокружности без концов. б) Докажите, что полуокружность без концов равномощна прямой. в) Докажите, что интервал равномощен прямой.

17) Докажите, что любые два круга равномощны.

18) Докажите, что множество точек полуинтервала $0 \leqslant x < 1$ имеет мощность континуума. (Указание. Рассмотрим число $0 \leqslant t < 1$. Запасёмся длинной бумажной лентой. Число $\frac{1}{2}$ делит наш полуинтервал пополам. Если $0 \leqslant t < \frac{1}{2}$, напишем на бумажке 0, иначе напишем 1. Ненужную половину полуинтервала, где нет нашего числа, выкинем. Теперь разделим (числом $\frac{1}{4}$ или числом $\frac{3}{4}$), как уж получится, наш новый полуинтервал снова пополам. Если t попало на левую половину, пишем на бумажке 0, иначе 1. Потом ...)