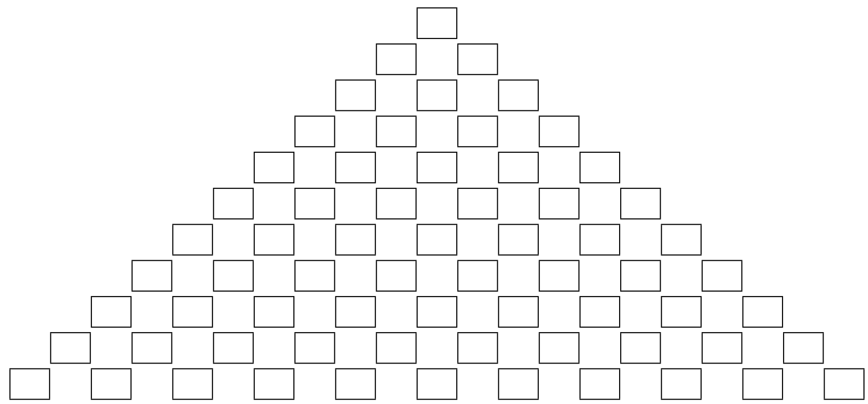
Гимназия 1543, 8 класс, 2008-2009. **Листок 1.12, 08 апреля.**

Числа сочетаний. Треугольник Паскаля.

Теория и разминка.

1) Сколькими способами вы можете прочесть слово ТРЕУГОЛЬНИК, двигаясь сверху вниз?

Т
Р Р
Е Е Е
У У У У
Г Г Г Г Г
О О О О О О
Л Л Л Л Л Л Л
Ь Ь Ь Ь Ь Ь Ь Ь
Н Н Н Н Н Н Н Н Н
И И И И И И И И И И
К К К К К К К К К К К



В клеточки справа впишите количество способов дойти до буквы, соответствующей этой клеточке при чтении слова ТРЕУГОЛЬНИК.

У нас получился числовой треугольник, известный как Треугольник Паскаля. Посмотрим, какие числа его составляют.

2) Докажите, что в n-ой строчке треугольника Паскаля (строчки нумеруются сверху вниз, самая верхняя, состоящая из одной единицы, — нулевая) на k-ом месте (места нумеруются слева направо, самое левое тоже нулевое)стоит число C_n^k.

3) Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля, кроме крайних единиц, равно сумме двух чисел стоящих над ним: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Докажите это же свойство, пользуясь известной формулой $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Напоминаем, что по определению $0! = 1$.

4) Докажите, что, задав крайние числа треугольника равными 1 и требуя соблюдения правила из предыдущей задачи, мы однозначно восстановим треугольник Паскаля.

5) В выражении $(x+1)^5$ раскрыли скобки и привели многочлен к стандартному виду. Какие коэффициенты получились при степенях переменной? Запишите и докажите общую формулу:

$(x+1)^n =$

Эта формула носит название Бином Ньютона. Более общая запись в задаче 8.

Многие свойства чисел сочетаний можно доказывать разными способами.

6) Докажите, что $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = \left(C_{2n}^n\right)$. Подсказки: а) Сколькими способами можно прочитать ТРЕУГО, дойдя до конкретной буквы О? Столькими же способами можно прочитать ОЛЬНИК. б) Каков коэффициент при x^n в $(1+x)^{2n}$ и каков в $((1+x)^n)^2$? в) Сколькими способами можно выбрать n шариков из n синих и n красных?

Задачи:

7) Докажите, что треугольник Паскаля симметричен: $C_n^k = C_n^{n-k}$

8) Докажите, что $(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n b^0$.

9) Известно, что $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$. Почему эти числа похожи на строки треугольника Паскаля? Будет ли дальше наблюдаться такое соответствие?

10) Найдите сумму чисел n-ой строки треугольника Паскаля.

11) Найдите знакопеременную сумму чисел n-ой строки треугольника Паскаля:
$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n$.

12) Начиная с единицы на одной стороне треугольника, сложите подряд несколько чисел по линии, параллельной другой стороне. Что получилось? Запишите в общем виде полученное соотношение и докажите его.

13) Докажите, что в строке треугольника Паскаля с простым номером p все числа делятся на p (кроме крайних единиц).