Гимназия №1543, 8 класс, 2008-2009.

Программа экзамена по спецкурсу за 8 класс.

1) Задача Леонардо Пизанского о кроликах. Числа Фибоначчи. Задача о числе способов замощения "доминошками" полоски ширины $\mathbf{2}$.

2) В любом n-угольнике ($n > 3$) найдётся диагональ, лежащая целиком внутри него. Триангуляция многоугольника. Сумма углов многоугольника.

3) Метод математической индукции. Суммы первых, вторых и третьих степеней первых n натуральных чисел. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения?

4) Полная математическая индукция. Если $x + \frac{1}{x}$ целое число, то целым является также и $x^n + \frac{1}{x^n}$ для любого натурального n.

5) Фибоначчиева система счисления. Любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности Фибоначчи. Если не разрешить использовать в этом представлении два соседних числа Фибоначчи одновременно, то такое представление однозначно.

6) Тождество Кассини для чисел Фибоначчи: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

7) Задача о домах и заборах: в городе n домов. Требуется построить несколько заборов так, чтобы:
1) каждый забор окружал хотя бы один дом; 2) никакие два забора не пересекались; 3) никакие два забора не окружали бы одну и ту же совокупность домов. Какое максимальное количество заборов можно построить?

8) Решение систем сравнений. Китайская теорема об остатках.

9) Деление с остатком. Простые и составные числа. НОД и НОК. Взаимная простота. Алгоритм Евклида.

10) Для любых взаимно-простых чисел a и b найдутся такие целые числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = 1$. Если $ab \,\vdots\, c$ и $НОД(a, c) = 1$, то $b \,\vdots\, c$. Основная теорема арифметики.

11) Решение линейных диофантовых уравнений.

12) Простых чисел бесконечно много. Сколько угодно составных чисел может идти подряд. Зависимость количества делителей числа от его разложения на простые множители.

13) Уравнение Пелля и его решение (на примере $x^2 - 2y^2 = 1$).

14) Задача "про Любу и Леру": На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Люба соединила некоторые точки прямолинейными отрезками. Оказалось, что некоторые отрезки пересекаются. Лера взялась соединить точки по-другому, сохранив количество отрезков и сделав их непересекающимися. Именно, Лера, заметив два пересекающихся отрезка AB и CD, стирает их и чертит отрезки AC и BD. Добьётся ли Лера своего?

15) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и наоборот. Неравенство треугольника. Если внутри треугольника ABC взята точка D, то $AD + DC < AB + BC$.

16) Задача о планете Шелезяка: на планете Шелезяка бывает три типа погоды: штиль, магнитная буря и метеоритный дождь. Погода каждого дня постоянна и определяется погодой предшествовавшей недели. Однажды всю неделю на Шелезяке лил метеоритный дождь. Докажите, что дождливые недели были и будут.

17) Запись рационального числа в в виде десятичной дроби. Периодичность. Критерий конечности и наличия предпериода.

18) Задача о странствующих рыцарях: в тридесятом королевстве у каждого перекрестка и у каждого замка сходятся по три дороги. Бесконечно много рыцарей пировали в замке, а поутру каждый поехал своей дорогой. За день каждый проезжает до следующей развилки, а утром следующего дня выбирает дорогу, по-прежнему чередуя левые и правые повороты. Докажите, что когда-нибудь все они вновь соберутся в этом же замке (если доживут).

19) Бесконечные множества. Счётное множество. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество. Множество целых чисел счётно. Множество рациональных чисел счётно. Счётное объединение счётных множеств счётно.

20) Множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц несчётно.

21) Любые два отрезка равномощны. Отрезок равномощен интервалу. Отрезок равномощен прямой. Отрезок равномощен квадрату.

22) Отрезок имеет мощность континуума.

23) Комбинаторика. Перестановки, размещения, сочетания. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары?

24) Шары и перегородки. Сколькими способами число n можно разбить а) ровно на k натуральных слагаемых? б) на произвольное число натуральных слагаемых?

25) Треугольник Паскаля и его некоторые свойства. Суммы чисел по строкам и другим линиям.