Гимназия №1543, 8 класс, 2008-2009. **26 ноября.**

Зачёт за I триместр.

ПОНЯТИЯ: Последовательность, формула общего члена последовательности, рекуррентный способ задания последовательности. Производная последовательности. Числа Фибоначчи F_n. Триангуляция многоугольника. Метод математической индукции. Делимость целых чисел. Деление с остатком. Сравнения по модулю.

1) Докажите следующие свойства производной последовательности:

а) Если $c_n = a_n + b_n$, то $c'_n = a'_n + b'_n$;

б) Если $c_n = ka_n$, то $c'_n = ka'_n$;

в) Если $c_n = a_n b_n$, то $c'_n = a'_n b_n + a_{n+1} b'_n = a'_n b_{n+1} + a_n b'_n$.

2) Дана последовательность $a_n = n^8$. Докажите, что a'_n делится на $2n+1$.

3) Найдите все последовательности e_n, такие, что

а) $e'_n = e_n$; б) $e'_n = \frac{e_n}{n}$.

4) Пусть $a_1 = 1$ и $a'_n = 2^n \cdot n$. Найдите a_n.

5) Некто приобрёл пару кроликов и поместил их в огороженный со всех сторон загон. Сколько кроликов будет через год, если считать, что каждый месяц пара даёт в качестве приплода новую пару кроликов, которые со второго месяца жизни также начинают приносить приплод?

6) Есть доска $2 \times n$ клеточек. Сколько существует способов покрыть её доминошками (плитками 1×2)?

7) В любом n-угольнике ($n > 3$) найдётся диагональ, лежащая целиком внутри него.

8) Сумма углов n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$.

9) Сколько диагоналей проводится при триангуляции n-угольника?

10) Докажите, что сумма первых n натуральных чисел есть $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Докажите, что сумма квадратов первых n натуральных чисел есть $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Докажите, что сумма кубов первых n натуральных чисел есть квадрат суммы этих чисел.

11) Известно, что $x + \frac{1}{x}$ есть целое число. Докажите, что целым является также и $x^n + \frac{1}{x^n}$ для любого натурального n.

12) Любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности Фибоначчи. Если не разрешить использовать в этом представлении два соседних числа Фибоначчи одновременно, то такое представление однозначно.

13) Несколько мальчиков и столько же девочек встали в круг. Докажите, что число пар рядом стоящих мальчиков равно числу пар рядом стоящих девочек.

14) На плоскости проведено n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей они делят плоскость?

15) Докажите тождество Кассини для чисел Фибоначчи:
$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

16) Вершины выпуклого 1543-угольника покрасили в три цвета так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что этот многоугольник можно триангулировать диагоналями так, чтобы у каждого треугольника цвета всех вершин были различны.

17) В городе n домов. Требуется построить несколько заборов так, чтобы:
1) каждый забор окружал хотя бы один дом; 2) никакие два забора не пересекались; 3) никакие два забора не окружали бы одну и ту же совокупность домов. Какое максимальное количество заборов можно построить?

18) Критерии делимости на 3, 9 и 11.

19) (Внимание! Задача слегка изменена!) Треть натурального числа поделили на его семнадцатую часть и получили в остатке 100. Что это было за число?

20) Может ли при целых m и n число $(m^2 + m + 1)^2 + (n^2 + n + 1)^2$ быть точным квадратом?

21) Существуют ли такие целые числа x и y, что $x^3 + y^3 = 10000000$?

22) Китайская теорема об остатках.

23) Подберите такие a и b, чтобы система сравнений $x \equiv a(mod\ 15)$,
$x \equiv b(mod\ 35)$ а) имела решение (и укажите это решение); б) была несовместна.

24) Принимающий указывает Вам числа m_1 и m_2 . Вы должны либо начать заполнять вторую строку таблицы

Остаток от деления на m_1	0	1	2	3	...	$m_1 - 1$
Числа, кратные m_2					...	

числами от 0 до $(m_1 - 1)m_2$ (тратя на выписывание очередного числа 1-2 секунды), либо сразу определить, что заполнить всю строку числами такого вида невозможно.