Гимназия №1543, 8 класс, 2008-2009. **25 февраля.**

Зачёт за II триместр. Программа.

ПОНЯТИЯ: простые и составные числа, НОД, НОК, Алгоритм Евклида, линейные диофантовы уравнения с двумя переменными, полуинвариант, метод спуска, зацикливание, неравенство треугольника, расстояние.

1) Алгоритм Евклида.

2) Пусть $u = НОК(a, b)$, а m — какое-то другое общее кратное a и b. Докажите, что $u|m$. (Подсказка: разделите m на u с остатком.)

3) Есть две банки, ёмкости которых равны **310** мл и **210** мл. Можно ли с помощью этих двух банок перелить из полной бочки достаточного объема в такую же пустую **3** л воды? **10** мл воды? **45** мл воды?

4) Китайская теорема об остатках.

5) Для любых взаимно-простых чисел a и b найдутся такие целые числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = 1$.

6) Если $ab \vdots c$ и $НОД(a, c) = 1$, то $b \vdots c$.

7) Пусть $(x_0\,;\,y_0)$ — некоторое решение уравнения $ax + by = c$, где a и b — взаимно-простые числа. Тогда все остальные решения этого уравнения имеют вид $(x_0 + bt\,;\,y_0 - at)$, где t — произвольное целое число.

8) Основная теорема арифметики.

9) Простых чисел бесконечно много.

10) Сколько угодно составных чисел может идти подряд.

11) Зависимость количества делителей числа от его разложения на простые множители.

12) На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается взять два числа, не делящие друг друга, стереть их и записать вместо них их НОД и НОК. Можно ли проделывать эту процедуру бесконечно много раз?

13) Уравнение $x^3 = 3y^3 + 9z^3$ не имеет решений в натуральных числах.

14) В лесу живут 12 гномов, у каждого дом окрашен в белый или красный цвет. Каждый гном дружит с нечётным числом других гномов. В январе первый гном перекрашивает свой дом в цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале так же поступает второй гном и так далее. Докажите, что наступит момент, после которого цвета домов перестанут меняться.

13) Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$. (Подсказка: пусть пара $(a\,;\,b)$ — одно из решений. Тогда пара $(3a - 4b\,;\,3b - 2a)$ тоже является решением.)

15) На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Люба соединила некоторые точки прямолинейными отрезками.

Оказалось, что некоторые отрезки пересекаются. Лера взялась соединить точки по-другому, сохранив количество отрезков и сделав их непересекающимися. Именно, Лера, заметив два пересекающихся отрезка $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$, стирает их и чертит отрезки $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BD}$. Добьётся ли Лера своего?

16) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и наоборот.

17) Неравенство треугольника.

18) а) На стороне треугольника $\boldsymbol{ABC}$ (не на $\boldsymbol{AC}$) взята точка $\boldsymbol{D}$. Докажите, что $\boldsymbol{AD} + \boldsymbol{DC} < \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC}$. б) Внутри треугольника $\boldsymbol{ABC}$ взята точка $\boldsymbol{D}$. Докажите, что $\boldsymbol{AD} + \boldsymbol{DC} < \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC}$.

19) На планете Шелезяка бывает три типа погоды: штиль, магнитная буря и метеоритный дождь. Погода каждого дня постоянна и определяется погодой предшествовавшей недели. Однажды всю неделю на Шелезяке лил метеоритный дождь. Докажите, что дождливые недели были и будут.

20) В парламенте у каждого депутата не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

21) а) Цифры в десятичной записи числа $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$ периодически повторяются. б) Если $\boldsymbol{n}$ не кратно ни 2, ни 5, то в их последовательности нет предпериода, а если кратно, то есть.

22) Среди первых $\boldsymbol{n^2}$ чисел Фибоначчи найдется число, делящееся на $\boldsymbol{n}$.

23)В тридесятом королевстве у каждого перекрестка и у каждого замка сходятся по три дороги. Несколько рыцарей пировали в замке, а поутру каждый поехал своей дорогой. За день каждый проезжает до следующей развилки, а утром следующего дня выбирает дорогу, по-прежнему чередуя левые и правые повороты. Докажите, что когда-нибудь все они вновь соберутся в этом же замке (если доживут).