9 "В", геометрия, 20 февраля, домашнее задание.

1) Известно, что $\overrightarrow{AB} = 0,4\overrightarrow{AC}$. Распределите единичную массу между точками A и C так, чтобы их центр масс был в точке B. (Выражение "распределите единичную массу" здесь и далее означает, что точкам нужно приписать массы, в сумме дающие 1.)

2) Распределите единичную массу по трём вершинам треугольника так, чтобы центр масс делил одну из медиан в отношении $1:2$, считая от вершины.

3) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки PC и AQ пересекаются в точке E. Известно, что $AE : EQ = 5 : 2$и $CE : EP = 7 : 6$. Нагрузите вершины треугольника массами так, чтобы центр масс попал в точку E. Вычислите $AP : PB$ и $BQ : QC$.

4) Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной a. Точка P удовлетворяет условию $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} + 7\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$. На каком расстоянии находится точка P от центра квадрата?

5) Средней линией четырехугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон. Докажите с помощью понятия центра масс, что средние линии и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке.

6) С помощью понятия центра масс докажите теорему Чевы: отрезки AA', BB', CC', соединяющие вершины треугольника ABC с точками на его противоположных сторонах пересекаются в одной точке если и только если $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$.

7) С помощью понятия центра масс докажите теорему Ван-Обеля: если отрезки AA', BB', CC', соединяющие вершины треугольника ABC с точками на его противоположных сторонах пересекаются в одной точке M, то $\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{AM}{MA'}$.