9 "В", геометрия, 27 марта, дополнение и домашнее задание.

Мы не смогли решить уравнение $(b_1+b_2-a_1-a_2)x^2+2(a_1a_2-b_1b_2)x+b_1b_2(a_1+a_2)-a_1a_2(b_1+b_2)=0$. Рассмотрим его дискриминант, делённый на 4: $\frac{1}{4}D=(a_1a_2-b_1b_2)^2-(b_1+b_2-a_1-a_2)(b_1b_2(a_1+a_2)-a_1a_2(b_1+b_2))$. Предположим, что $a_1=b_1$. Тогда $\frac{1}{4}D=a_1^2(a_2-b_2)^2-a_1(b_2-a_2)(b_2(a_1+a_2)-a_2(a_1+b_2))=0$, убедитесь в этом. Этот факт означает, что наш страшный многочлен от четырёх переменных a_1, a_2, b_1, b_2 делится на a_1-b_1, то есть раскладывается на множители, одним из которых является (a_1-b_1). Так же точно можно легко проверить, что наш дискриминант обращается в 0 и при других совпадениях: $a_2=b_2$, $a_1=b_2$, $a_2=b_1$. Это значит, что он делится и на три другие скобки. То есть, наш дискриминант, делённый на 4, равен $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_1-b_2)(a_2-b_1)Q(a_1, a_2, b_1, b_2)$, где $Q(a_1, a_2, b_1, b_2)$ — некий мнгогочлен, частное от деления на все четыре скобки. Но степень нашего дискриминанта равна 4 и степень произведения скобок тоже 4, поэтому степень Q равна 0. То есть Q — это какое-то постоянное число. Какое именно, можно определить, выбрав любые различные a_1, a_2, b_1, b_2, например $a_1=0$, $a_2=1$, $b_1=2$, $b_2=3$. Тогда уравнение примет вид $4x^2-12x+6=0$, его $\frac{1}{4}D=12$. С другой стороны, $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_1-b_2)(a_2-b_1)Q=12Q$. Значит, $Q=1$ и дискриминант нашего уравнения (уже не делённый на 4) равен $4(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_1-b_2)(a_2-b_1)$. Это и есть то разложение на множители, которое мы с вами не смогли получить на уроке; и мудрено, в самом деле. Заметим, что дискриминант положителен, когда чётное число скобок равно 0, что в точности означает, что окружности не пересекаются.

1) Какое преобразование плоскости получится при композиции двух инверсий с одним и тем же центром?

2) Докажите, что окружность, перпендикулярная окружности инверсии, при инверсии переходит сама в себя.

3) Известна такая задача: если четыре окружности внешне касаются друг друга "по цепочке" (каждая — двух соседних), то четыре точки касания лежат на одной окружности. Получите простое доказательство этого факта, применив сначала инверсию с центром в одной из точек касания.

4) Окружности радиусов R и r $(R>r)$ внешне касаются. Укажите центр инверсии, переводящей их друг в друга и найдите её радиус.

5) (Продолжение.) В каком отношении диаметр большей окружности делится образом центра малой окружности при упомянутой инверсии?

6) В окружности проведена хорда AB. Две окружности касаются этой хорды, касаются изнутри данной окружности, а также касаются друг друга в точке C. Найдите ГМТ C.

7) Докажите, что точка пересечения диагоналей равнобокой трапеции и точка пересечения продолжений её боковых сторон инверсны друг другу относительно описанной окружности трапеции.