Уроки №19-20 15.10.09

Обратные тригонометрические функции

1. Обратные тригонометрические функции, определение

arcsin

Если $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то

$$\arcsin y = t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \sin t = y; \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для иллюстрации нам будет достаточно правой полуокружности: отрезок вертикальной оси $[-1;1]$ содержит все значения, которые может принимать y, а точки на правой полуокружности соответствуют углам t.

Как выглядит график функции $f(x) = \arcsin x$? Как связаны функции sin и arcsin? (было задано на дом)

Примеры:

1) $\arcsin y = \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}$;
2) $\arcsin y = -\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\arcsin y = 0 \Leftrightarrow y = 0$;
4) $\arcsin(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{\pi}{6}$;
5) $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$;
6) $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$;
7) $\arcsin(-y) = -\arcsin y$.

arccos

Если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\arccos x = t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \cos t = x; \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Для иллюстрации нам будет достаточно верхней полуокружности: отрезок горизонтальной оси $[-1;1]$ содержит все значения, которые может принимать x, а точки на верхней полуокружности соответствуют углам t.

Примеры нужно будет придумать дома самостоятельно.

Записи вида $\arcsin 2$, $\arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\arcsin \frac{\pi}{2}$ не имеют смысла.

arctg

$$\operatorname{arctg} y = t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} t = y; \\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для иллюстрации нам будет достаточно правой полуокружности: отрезок ось тангенсов содержит все значения, которые может принимать y, а точки на правой полуокружности соответствуют углам t. Сравните с arcsin!

Примеры:

1) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$;
3) $\operatorname{arctg} 0 = 0$;
4) $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$;
5) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$;
6) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = -1$.

Попробуйте по аналогии придумать определение арккотангенса, нарисуйте иллюстрацию к определению, придумайте примеры и нарисуйте графики (дома).

2. Простейшие тригонометрические уравнения

1) $\sin x = \dfrac{2}{3}$;
2) $\cos x = \dfrac{3}{7}$;
3) $\operatorname{tg} x = 43$;
4) $\operatorname{ctg} x = 179$;
5) $\sin x = -\dfrac{3}{5}$;
6) $\cos x = -\dfrac{4}{7}$.

Обратите внимание, что все вычисления, которые можно выполнить, нужно выполнять (например, $\pi - \arccos \frac{4}{7}$, а не $\arccos(-\frac{4}{7})$; $\frac{2\pi}{3}$, а не $\arccos(-\frac{1}{2})$).

3. Простейшие тригонометрические неравенства

1) $\sin x \leqslant \dfrac{2}{3}$;
2) $\cos x > \dfrac{3}{7}$;
3) $\operatorname{tg} x \geqslant 2$;
4) $\operatorname{tg} x < 3$;
5) $\operatorname{ctg} x \geqslant -3$.

4. Вычислительные задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями

Вычислить (в задачах 4,5,8,9 $-1 \leqslant x \leqslant 1$):

1) $\operatorname{tg}(\arccos x)$;
2) $\cos(2 \arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2})$;
3) $\arccos \left(\dfrac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}} \right)$;
4) $\cos(\arccos x)$;
5) $\cos(\arcsin x)$;
6) $\arccos(\sin \dfrac{\pi}{7})$;
7) $\arcsin(\sin 10)$.

8) Докажите, что для любого $x \in [-1;1]$ выполнено: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Вычислить

9) $\arccos(\sin 14)$;
8) $\sin(\arcsin x)$;
10) $\sin(\arccos x)$.

Решить неравенство:

11) $\sin x > \cos^2 x$;
12) $20 \sin^2 x + 9 \cos x < 21$;
13) $\operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x - 6 \geqslant 0$.

5. Домашнее задание 1) теоретическая часть (функции, графики, примеры); 2) Саакян 1297, 237а, 236б, 250б; 3) №12,13