Уроки №83-84 06-08.04.10

Пределы, непрерывные функции

---

1. Второй замечательный предел

Ранее было доказано, что предел при $n \to \infty$ выражения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ существует, и определили:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Рассмотрим выражение $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$, $x \in \mathbb{R}$. Для любого x выполнено:

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

поскольку $[x] \leqslant x \leqslant [x] + 1$.

Найдем пределы при $x \to +\infty$ левой и правой частей неравенства:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right) = e \cdot 1 = e$$

Таким образом, по лемме о двух милиционерах, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

2. Разбор самостоятельной работы

3. Решение задач

Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(\operatorname{ctg}^2 x - 3\right)}{\sin 3x - 1}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^x$;

4) $\lim\limits_{x\to1} (1 - x)\log_x 2$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

4. Домашнее задание Разобраться со всеми долгами по дз, готовиться к контрольной работе, дорешать сегодняшние задачи.

Контрольная работа №11
«Предел функции. Асимптоты графиков функций»

I вариант

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right)$; **2.** $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{4-\sqrt{x-1}}{x^2-17x}$; **3.** $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+1}{4x^2+4\pi x+\pi^2}$.

4. Докажите, что уравнение $x^3+3x+1=0$ имеет решение x_0 и найдите $[x_0]$.

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-2}{2x^2+x-1};\quad g(x)=\begin{cases}2, & x<-1;\\ |x-1|, & -1\leqslant x<2;\\ \dfrac{2-3x}{x}, & x\geqslant 2.\end{cases}\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}, & |x|<1;\\ 4x-a, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

5. Найдите промежутки непрерывности функции $f(x)$ и уравнения всех асимптот её графиков.

6. Постройте график функции $g(x)$.

7. При каких $a\in\mathbb{R}$ функция $h(x)$ непрерывна в точке $x_0=1$?

8. Постройте график функции $h(x)$ при найденных значениях a.

Вычислите:

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$; **10.** $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.