Уроки №89-90 20.04.10

Производная. Вычисление производных

---

1. Разбор домашнего задания.

537. Исследуйте на дифференцируемость $f(x) = \sin|x| - 1$.

Для $\sin|x|$ нет формулы для вычисления производной, которой можно воспользоваться. Однако мы можем рассмотреть функцию на отдельных промежутках:

1) $x > 0$: $f(x) = \sin x - 1$, $f'(x) = \cos x$;

2) $x < 0$: $f(x) = -\sin x - 1$, $f'(x) = -\cos x$;

3) $x = 0$: вспомним, что производная — это предел при $x \to 0$, поэтому для нахождения производной нам необходима окрестность, в которой поведение функции подчиняется некоторым законам. Нельзя сказать, что $f(x) = \sin x - 1$, поскольку в любой окрестности нуля есть отрицательные точки, в которых $f(x) \neq \sin x - 1$, нельзя сказать, что $f(x) = -1$, потому что в маленькой проколотой окрестности нуля $f(x) \neq -1$. Поэтому нужно искать производную непосредственно:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x}.$$

Однако мы знаем, что $(\sin x - 1)' = 1$ в точке 0 и $(-\sin x - 1)' = -1$ в точке 0, поэтому можно сказать, что $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0-0} \frac{f(x)+1}{x} = -1$ и $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)+1}{x} = 1$, т. е. односторонние пределы в нуле не совпадают, значит, предела не существует, значит, функция не дифференцируема в нуле.

1362: Найдите производную

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$?

Найдем $f'(x)$ при $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0} = 2x\sin\frac{1}{x} = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не существует, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ не существует.

Найдем $f'(0)$. Аналогично предыдущей задаче, здесь нельзя сказать, что в нуле $f(x) = x^2$, поскольку в любой проколотой окрестности нуля $f(x) \neq x^2$. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, поэтому $f'(0) = 0$.

1383: При каком значении параметра $a > 0$ касательная, проведенная к графику $y = \sqrt{1+ax}$ и параллельная прямой $y = \frac{x}{2}$, находится на минимальном расстоянии от начала координат?

Уравнение касательной: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{a}{2\sqrt{1+ax_0}}$$

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны, поэтому $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, поэтому можем выразить x_0: $x_0 = \frac{a^2-1}{a}$, и найти $f(x_0)$: $f(x_0) = a$. Таким образом, уравнение касательной имеет вид:

$$y = \frac{1}{2}x - \left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Заметим, что прямая находится на минимальном расстоянии от начала координат, когда она находится на минимальном расстоянии по оси ординат от начала координат, т.е. когда $y(0)$ минимально. В данном случае $(a+\frac{1}{a}) \geqslant 2$, причем равенство достигается при $a = \frac{1}{a} = 1$, поэтому ответ: при $a = 1$.

2. Самостоятельное решение задач

Саакян: 534, 529, 531, 532, 538, 540, 1214, 1216, 1381, 1382, 1370, 1371 (только пункты а)

3. Домашнее задание Саакян 529б, 531б, 535б, 538б, 541б, 613б, 1377, 1378, 1382.

Уроки №91-92 22-23.04.10

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

---

1. Некоторые факты из теории множеств.

Определение 1. s называется точной верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ (обозначается $s = \sup X$), если

1) $\forall x \in X$ выполнено $x \leqslant s$;

2) $\forall M \in \mathbb{R}$ такого, что $\forall x \in X$ выполнено $x \leqslant M$, справедливо $s \leqslant M$.

i называется точной нижней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ (обозначается $i = \inf X$), если

1) $\forall x \in X$ выполнено $x \geqslant i$;

2) $\forall m \in \mathbb{R}$ такого, что $\forall x \in X$ выполнено $x \geqslant m$, справедливо $i \geqslant m$.

Аксиома Дедекинда:

Если множества $A, B \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим двум условиям:

1. $\forall a \in A, \forall b \in B$ *выполняется неравенство* $a \leqslant b$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b \in B \mid b - a < \varepsilon$;

то существует и единственно такое число c, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$.

Теорема о существовании точной грани. Если множество ограничено сверху, то существует его точная верхняя грань. Если множество ограничено снизу, то существует его точная нижняя грань.

Доказательство. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, тогда существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in X$ выполнено $x \leqslant M$. Обозначим за B множество чисел b таких, что $\forall x \in X$ выполнено $x \leqslant b$. Это множество непусто, поскольку $M \in B$. Пусть $A = \mathbb{R} \setminus B$. A тоже не пусто, поскольку $X \subset A$. Тогда

1) $\forall a \in A, \forall b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant b$. Действительно, если $a \in A$, то существует $x_0 \in X$ такой, что $a \leqslant x_0$ (иначе бы a принадлежало B). Но тогда $\forall b \in B$ $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b \in B \mid b - a < \varepsilon$. Чтобы это доказать, выберем произвольные элементы $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$. Они существуют, поскольку X и B непустые. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Если $b_1 - a_1 < \varepsilon$, то условие выполнено. Если же нет, то рассмотрим число $\frac{a_1+b_1}{2}$. Это число принадлежит либо A, либо B (потому что $A \cup B = \mathbb{R}$). Если оно принадлежит A, положим $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, а $b_2 = b_1$. Если оно принадлежит B, то наоборот. И так далее будем действовать, на каждом шаге получая $[a_i, b_i]$, длина которого в 2^i раз меньше начального отрезка. Рано или поздно мы получим такие a_n и b_n, что $b_n - a_n < \varepsilon$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Таким образом, для множеств A и B выполнена аксиома Дедекинда, значит, $\exists! s$ такое, что

$$a \leqslant s \leqslant b \quad \text{для всех} \quad a \in A,\ b \in B.$$

Из этого неравенства следует, что s — точная верхняя грань множества X. Поскольку $X \subset A$, то из левой части неравенства следует, что $x \leqslant s$ для всех X, а из правой части неравенства следует, что $s \leqslant M$ для любой верхней грани M.

Аналогично можно доказать, что у множества, ограниченного снизу, существует точная нижняя грань.

2. Свойства дифференцируемых функций.

***Определение* 2.** Критическими точками функции $y = f(x)$ называются точки ее области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Примеры:

1) $f(x) = x^3$; $D(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2$; $x_0 = 0$ — критическая точка.

2) $g(x) = |x-1|$; $D(g) = \mathbb{R}$; $g'(1)$ не существует, поэтому $x_0 = 1$ — критическая точка.

3) $h(x) = \sqrt{x-2}$; $D(h) = [-2; +\infty)$; $h'(-2)$ не существует, поэтому, $x_0 = -2$ — критическая точка.

***Определение* 3.** Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если $\exists \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \ \Rightarrow f(x) \leqslant (ge) f(x_0)$. Значение $f(x_0)$ называется максимумом (минимумом) функции.

Если точка x_0 является точкой максимума или точкой минимума функции $y = f(x)$, то она называется *точкой экстремума* этой функции. Значения функции в точках экстремума называются *экстремумами* функции.

Как связаны между собой точки экстремума и критические точки? На этот вопрос дает ответ следующая теорема.

Теорема Ферма. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: в точке экстремума касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Доказательство. По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пусть $f'(x_0) = a \neq 0$. Допустим, $a > 0$ (если $a < 0$, доказательство будет аналогично). Поскольку

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| < \varepsilon,$$

или, если раскрыть модуль, $a - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < a + \varepsilon$. Поскольку $a > 0$, можно выбрать ε такое, что $a - \varepsilon > 0$. Это значит, что

$$\exists \delta > 0 \mid |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

или

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) - f(x_0) > 0; \\ x - x_0 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) - f(x_0) < 0; \\ x - x_0 < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Но, поскольку в любой δ-окрестности x_0 есть такие x, что $x - x_0 > 0$, и такие, что $x - x_0 < 0$, то эта совокупность противоречит наличию экстремума в точке x_0.

Следствие. Точка экстремума функции является критической.

Таким образом, точки экстремума функции имеет смысл искать только среди ее критических точек, но не каждая критическая точка будет являться точкой экстремума.

Пример решения задачи:

730а: $f(x) = x \sin x + \cos x$, найти точки максимума и минимума.

$f'(x) = x \cos x$, прозиводная существует на $\mathbb{R}$, равна нулю в точках $\{0; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. Мы нашли критические точки, но как проверить, являются ли они точками максимума или минимума? Для этого понадобятся еще теоремы.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она достигает на $[a; b]$ своего минимума и максимума.

Доказательство. Поскольку функция непрерывна на $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$, или множество E_f ограничено. Поэтому существует $s = \sup E_f$. Докажем, что существует $x_1 \in [a; b]$ такой, что $f(x_1) = s$, тогда, очевидно, x_1 будет точкой максимума.

Предположим, что функция не достигает на отрезке своей верхней грани, это значит, что $s - f(x) > 0$ для любого $x \in [a; b]$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{s - f(x)}.$$

Эта функция непрерывна на $[a; b]$ как частное непрерывных функций, не обращающихся в ноль. Значит, она ограничена на $[a; b]$, т. е. существует $M > 0$ такое, что

$\varphi(x) \leqslant M$ для всех $x \in [a; b]$, или

$$\frac{1}{s - f(x)} < M,$$

откуда

$$f(x) < s - \frac{1}{M}.$$

Но это противоречит тому, что $s = \sup E_f$, значит, наше предположение неверно, и существует $x_1 \in [a; b]$ такой, что $f(x_1) = \sup E_f$, т.е. x_1 — точка максимума.

Достижение минимума доказывается аналогично (вводится $i = \inf E_f$, рассматривается функция $\psi(x) = \frac{1}{f(x)-i} < N$, тогда $f(x) > i + \frac{1}{N}$, что противоречит тому, что $i = \inf$).

Благодаря теореме Вейерштрасса можно доказать следующую теорему:

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(; b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует $x_0 \in (; b) | f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: для функции $y = f(x)$, удовлетворяющей данным условиям, существует $x_0 \in (; b)$, в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Доказательство.

1) Если для всех $x \in [a; b]$ $f(x) = \text{const}$, то $f'(x) = 0$ на $[a; b]$.

2) Пусть $f(x)$ не является постоянной функцией на $[a; b]$. Так как данная функция непрерывна на $[a; b]$, то на этом отрезке по теореме Вейерштрасса достигаются ее максимум M и минимум m, причем, так как $f(x) \neq \text{const}$, то $m \neq M$, а так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из них обязано достигаться во внутренней точке этого отрезка, то есть в интервале $(a; b)$. Таким образом, существует $x_0 \in (a; b) \mid f(x_0) = M$ или $f(x_0) = m$. Следовательно, x_0 — точка максимума или минимума. Поэтому, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$, ч.т.д.

Вернемся к задаче 370а.

Пусть a и b — соседние критические точки. Докажем, что $f(a) - f(x)$ сохраняет знак на всем промежутке $(a; b)$. Действительно, если эта функция обращается в нуль где-то в точке $c \in (a; b)$, то для отрезка $[a; c]$ выполнена теорема Ролля, тогда на $[a; c]$ существует критическая точка, но a и b — соседние критические точки. Поэтому $f(a) - f(x)$ не обращается в нуль, а значит, по ранее доказанной теореме, сохраняет знак.

Это значит, что если мы возьмем три соседние критические точки a, b и c, и сравним $f(b)$, $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где x_1, x_2 — произвольные такие, что $a < x_1 < b$, $b < x_2 < c$, то если

$$\begin{cases} f(x_1) < f(b); \\ f(x_2) < f(b); \end{cases} \quad \text{то } b \text{ — точка максимума, если же}$$

$$\begin{cases} f(x_1) > f(b); \\ f(x_2) > f(b); \end{cases} \quad \text{то } b \text{ — точка минимума, если же}$$

$$\begin{cases} f(x_1) < f(b); \\ f(x_2) > f(b); \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} f(x_1) > f(b); \\ f(x_2) < f(b); \end{cases}$$

то b не является точкой экстремума.

Поэтому в задаче 370а нужно для каждого экстремума выбрать две точки по обе стороны от него, и сравнить значения функции в этих точках и в экстремуме. Например, рассмотрим точку экстремума 0:

Выберем в качестве точек для сравнения $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$, тогда

$$f(0) = 1;$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+1\right);$$
$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+1\right).$$

Поскольку
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+1\right) > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{4}+1 > \sqrt{2},$$
то 0 — точка минимума.

Рассмотрим точку $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \geqslant 0$. Выберем в качестве точек для сравнения $\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $\pi + 2\pi k$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) = \frac{\pi}{2}+2\pi k;$$
$$f\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right) = \frac{\pi}{12}+\pi k+\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$f(\pi+2\pi k) = -1.$$

Поскольку

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k > \frac{\pi}{12}+\pi k+\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{5\pi}{12}+\pi k > \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \frac{\pi}{2}+2\pi k > -1,$$

то $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k > 0$ — точка максимума. Поскольку $f(x)$ — функция четная, то $-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ — тоже точка минимума.

Рассмотрим точку $x = \frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k \geqslant 0$. Выберем в качестве точек для сравнения $\pi + 2\pi k$ и $2\pi k$:

$$f\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right) = -\frac{3\pi}{2}-2\pi k;$$
$$f(\pi+2\pi k) = -1;$$
$$f(2\pi k) = 1;$$

Поскольку

$$-\frac{3\pi}{2}-2\pi k < -1 < 1,$$

то $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k > 0$ — точка минимума. Поскольку $f(x)$ — функция четная, то $-\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ — тоже точка минимума.

Ответ: точки минимума: $\{0; \pm\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\}$, точки максимума: $\{\pm\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(; b)$, то существует $x_0 \in (; b)$ такой, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрический смысл теоремы: для функции $y = f(x)$, удовлетворяющей данным условиям, существует точка, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB, где $A = (a; f(a))$; $B = (b; f(b))$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Тогда $g(a) = f(a)$ и $g(b) = f(a)$, причем $g(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(; b)$, так как является суммой непрерывных и дифференцируемых функций; $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

По теореме Ролля существует $x_0 \in (; b)$ такой, что $g'(x_0) = 0$, то есть, $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ч. т. д.

3. Домашнее задание Саакян: 729а, 741а, 743а, 746а, 731а, 732а, 734а, 735а. Искать только критические точки, распознавать максимум и минимум не нужно.